

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

Г. Л. Коткин, В. Г. Сербо, А. И. Черных

# ЛЕКЦИИ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Учебное пособие

Новосибирск  
2007

УДК 530.1

ББК В21я73-1  
К735

**Коткин Г. Л., Сербо В. Г., Черных А. И.**

Лекции по аналитической механике: Учеб. пособие/ Новосибирский гос. ун-т, Новосибирск. 2007. 188 с.

ISBN

В данном пособии аналитическая механика излагается как часть курса теоретической физики, призванная познакомить студентов с набором методов и понятий, которые окажутся чрезвычайно полезными в теории поля, квантовой механике и статистической физике. Сначала рассматривается движение частиц в центральное поле и рассеяние частиц на основе уравнений Ньютона, затем вводятся и подробно изучаются уравнения Лагранжа для различных систем, линейные и нелинейные колебания, гамильтонов формализм, движение твёрдого тела. К каждой теме приведены задачи, решавшиеся на семинарах.

Предназначено для студентов физических факультетов. Содержание соответствует курсу “Аналитическая механика”.

Рецензент

член-кор. РАН И. Б. Хриплович

© Новосибирский государственный университет, 2007

© Коткин Г. Л., 2007

© Сербо В. Г., 2007

© Черных А.И., 2007

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	7
<i>Глава I. НЬЮТОНОВА МЕХАНИКА. ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПОЛЕ. РАССЕЯНИЕ</i>	
§ 1. Одномерное движение в потенциальном поле. Период колебаний .....	9
§ 2. Движение в центральном поле .....	11
2.1. Радиальное движение .....	12
2.2. Траектории .....	13
§ 3. Задача Кеплера .....	14
3.1. Траектории .....	14
3.2. Эллиптическая траектория. Законы Кеплера .....	16
3.3. Дополнительный интеграл движения в задаче Кеплера .....	18
3.4. Движение в центральном поле $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$ .....	19
§ 4. Изотропный осциллятор .....	21
§ 5. Задача двух тел .....	23
§ 6. Сечение рассеяния. Формула Резерфорда .....	24
6.1. Постановка задачи рассеяния .....	24
6.2. Рассеяние под малыми углами .....	25
6.3. Формула Резерфорда .....	28
§ 7. Теорема о вириале .....	30
<i>Глава II. ЛАГРАНЖЕВА МЕХАНИКА</i>	
§ 8. Уравнения Лагранжа .....	33
8.1. Уравнения Лагранжа для нерелятивистской частицы в потенциальном поле — ковариантная запись уравнений Ньютона .....	33
8.2. Обобщённые координаты и импульсы .....	34
§ 9. Принцип наименьшего действия .....	35
9.1. Принцип Гамильтона. Ковариантность уравнений Лагранжа относительно замены координат .....	35
9.2. Преобразование функции Лагранжа при преобразовании координат и времени .....	37
§ 10. Функция Лагранжа для частицы в электромагнитном поле. Неоднозначность выбора функции Лагранжа .....	38
§ 11. Функция Лагранжа в релятивистском случае .....	40
§ 12. Функция Лагранжа для систем с идеальными голономными связями .....	41
§ 13. Циклические координаты. Энергия в лагранжевом подходе .....	45
§ 14. Симметрия и интегралы движения. Теорема Нётер .....	47
14.1. Примеры .....	47
14.2. Обобщение .....	48
14.3. Теорема Нётер .....	49
§ 15. Фундаментальные законы сохранения для замкнутой системы частиц .....	51
§ 16. Преобразования Галилея .....	53
§ 17. Неинерциальные системы отсчёта .....	54
17.1. Система отсчёта, движущаяся поступательно .....	54
17.2. Вращающаяся система отсчёта .....	55
17.3. Теорема Лармора .....	56
§ 18. Эффективная функция Лагранжа для электромеханических систем .....	57

### Глава III. КОЛЕБАНИЯ

§ 19. Линейные колебания	61
19.1. Одна степень свободы	61
19.2. Колебания систем со многими степенями свободы	62
19.3. Плоский двойной маятник	64
§ 20. Ортогональность нормальных колебаний. Случай вырождения частот	66
20.1. Ортогональность нормальных колебаний	66
20.2. Случай вырождения частот. Нормальные координаты	66
20.3. Колебания слабо связанных систем. Биения	67
§ 21. Вынужденные колебания. Резонансы	70
§ 22. Колебания с трением	73
§ 23. Колебания при наличии гироскопических сил	76
23.1. Гироскопические силы	76
23.2. Заряженная частица в потенциальном и магнитном полях	77
23.3. Частица внутри гладкого вращающегося параболоида в поле тяжести	80
23.4. Точки Лагранжа в Солнечной системе	80
§ 24. Колебания симметричных систем	81
§ 25. Колебания молекул	83
§ 26. Колебания линейных цепочек	86
26.1. Уравнения движения и граничные условия	86
26.2. Бегущие волны	87
26.3. Стоячие волны и спектр	89
§ 27. Акустические и оптические колебания линейных цепочек	91
§ 28. Вынужденные колебания линейных цепочек под действием гармонической силы	94
§ 29. Нелинейные колебания. Ангармонические поправки	95
29.1. Одномерные нелинейные колебания	95
29.2. Многомерные нелинейные колебания. Комбинационные частоты	98
§ 30. Нелинейные резонансы	99
§ 31. Параметрический резонанс	104
§ 32. Движение в быстро осциллирующем поле	107

### Глава IV. ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА

§ 33. Уравнения Гамильтона	109
33.1. Функция Гамильтона. Уравнения Гамильтона	109
33.2. Интегралы движения в гамильтоновом подходе	112
§ 34. Вариационный принцип для уравнений Гамильтона	114
§ 35. Скобки Пуассона	115
35.1. Определение и основные свойства	116
35.2. Тождество Якоби и теорема Пуассона	117
§ 36. Канонические преобразования	119
36.1. Определение канонического преобразования. Производящая функция	119
36.2. Другие производящие функции	121
§ 37. Канонические преобразования и скобки Пуассона	123
37.1. Инвариантность скобок Пуассона относительно канонических преобразований	123
37.2. Необходимый и достаточный признак того, что преобразование является каноническим	124

§ 38. Примеры канонических преобразований .....	125
§ 39. Действие вдоль истинной траектории как функция начальных и конечных координат и времени .....	128
39.1. Свойства $S(q, t)$ .....	129
39.2. Движение системы как каноническое преобразование .....	130
39.3. Доказательство теорема Нётер .....	130
§ 40. Теорема Лиувилля .....	131
40.1. Инвариантность фазового объёма относительно канонических преобразований .....	131
40.2. Фокусирующая линза .....	132
§ 41. Уравнение Гамильтона–Якоби .....	134
41.1. Уравнение Гамильтона–Якоби. Метод разделения переменных .....	134
41.2. Движение релятивистской частицы в поле $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ .....	135
41.3. Оптико–механическая аналогия .....	137
§ 42. Переменные действие–угол .....	138
42.1. Системы с одной степенью свободы .....	138
42.2. Системы со многими степенями свободы .....	141
42.3. Функция Гамильтона, зависящая явно от времени .....	142
§ 43. Адиабатические инварианты .....	143
43.1. Постановка задачи и результат .....	143
43.2. Адиабатический инвариант для частицы в ящике .....	145
43.3. Сохранение адиабатического инварианта .....	146
§ 44. Движение системы со многими степенями свободы. Динамический хаос .....	148

### *Глава V. ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА*

§ 45. Кинематика твёрдого тела .....	153
§ 46. Импульс, момент импульса и кинетическая энергия твёрдого тела .....	156
46.1. Импульс твёрдого тела .....	156
46.2. Момент импульса твёрдого тела .....	156
46.3. Кинетическая энергия твёрдого тела .....	157
46.4. Тензор моментов инерции твёрдого тела .....	158
§ 47. Уравнения движения твёрдого тела. Примеры .....	160
47.1. Уравнения движения твёрдого тела. Уравнения Эйлера .....	160
47.2. Свободное движение шарового и симметрического волчков .....	162
47.3. Быстрый волчок в поле тяжести .....	164
§ 48. Углы Эйлера .....	167

### *ДОПОЛНЕНИЯ*

A. Элементы вариационного исчисления .....	169
B. Системы со связями .....	171
B.1. Системы с идеальными голономными связями .....	171
B.2. Силы реакции связей .....	174
B.3. Неопределенные множители Лагранжа. Идеальные неголономные связи ...	175
C. Уравнение Хилла, уравнение Матьё и параметрический резонанс .....	177
C.1. Общие свойства уравнения Хилла .....	177
C.2. Уравнение Матьё .....	178
C.3. Параметрический резонанс на основной гармонике $\gamma = 2\omega_0$ .....	179
C.4. Параметрический резонанс при $\gamma = \omega_0$ .....	181

D. Дифференциальные формы и канонические преобразования .....	182
D.1. Дифференциальные формы .....	183
D.2. Новое определение канонических преобразований .....	185
D.3. Сохранение фазового объема при канонических преобразованиях .....	186
D.4. Инвариантность скобок Пуассона относительно канонических преобразований .....	186
<i>Библиографический список</i> .....	187

## Предисловие

Понятно, что аналитическая механика так или иначе нужна физикам, область деятельности которого связана с механикой (гидродинамика, газовая динамика и т.д.). Но нужна ли она студенту, который собирается работать в области физики плазмы, ядерной физики, квантовой оптики, радиофизики и т. д.? Нужна! Дело в том, что аналитическая механика является первой главой теоретической физики; развиваемые в этой главе методы и идеи оказываются важными буквально для всех остальных разделов теоретической физики. Лагранжев и гамильтонов формализмы, нормальные колебания, адиабатические инварианты, теорема Лиувилля, канонические преобразования — эти понятия являются той азбукой, без знания которой невозможно глубокое изучение теории поля, статистической физики, квантовой механики. Почти наверняка в любой серьёзной книге по физике встречается стандартная фраза “Гамильтониан в этом случае имеет вид . . .” (см., например, книгу “Физики продолжают шутить”. С. 154).

Данное пособие написано на основе нашего многолетнего опыта чтения лекций и проведения семинаров на физическом факультете Новосибирского государственного университета. Лекции читались раз в неделю в течение весеннего семестра 2-го курса параллельно со второй частью электродинамики и перед курсом квантовой механики. Отметим особенности этого курса.

(i) Основной особенностью является постепенное вхождение в сложные разделы аналитической механики, с тем чтобы не потерять связь со слушателями. В начале курса повторяются частично известные ещё с первого семестра уравнения Ньютона, движение в центральное поле и рассеяние. Уравнения Лагранжа выводятся из принципа Гамильтона, а их справедливость проверяется сведением их к уравнениям Ньютона. Мы надеемся, что такой подход позволяет проще и быстрее освоить новые понятия лагранжевой механики. Далее читались уже устоявшиеся традиционные разделы аналитической механики как части курса теоретической физики: линейные и нелинейные колебания, гамильтонов формализм, движение твёрдого тела. Возникшие в последнее время такие важные разделы как общее исследование уравнений динамики, улучшенная теория возмущений для нелинейных колебаний, динамический хаос, должны, по нашему мнению, быть предметами отдельных дополнительных курсов.

(ii) Если была возможность достаточно просто провести аналогии или сопоставления с электродинамикой, квантовой механикой, статистической механикой, мы не могли устоять перед такими искушениями.

(iii) В пособие включено большинство задач, которые решались на семинарах.

(iv) Содержание книги несколько (но не слишком!) расширено по сравнению с тем, что читалось на лекциях.

(v) Для вдумчивых студентов есть дополнения, расширяющие и проясняющие основной текст.

Нумерация формул содержит две цифры. Например, (3.7) означает формулу (7) из § 3. Ссылки на формулы из данного параграфа даются в сокращённом виде без указания номера параграфа.

В заключение заметим, что есть много хороших книг по аналитической механике, например, “Механика” Ландау и Лифшица (первый том курса теоретической физики) [1] и “Классическая механика” Голдстейна [2]. Из более современных книг упомянем курс механики Кембриджского университета — D. Tong “Classical Dynamics”

(доступна по адресу в Интернете <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/dynamics/>). Основным пособием для семинаров по данному курсу является “Сборник задач по классической механике” Коткина и Сербо [3].



# Глава I

## НЬЮТОНОВА МЕХАНИКА.

### ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПОЛЕ.

### РАССЕЯНИЕ

В дальнейшем предполагаются хорошо известными из курса общей физики такие понятия, как инерциальная система отсчёта, материальная точка или частица, масса, сила, потенциальная энергия и законы Ньютона.

#### § 1. Одномерное движение в потенциальном поле. Период колебаний

Пусть в некоторой инерциальной системе отсчёта частица массы  $m$  движется вдоль оси  $x$  в потенциальном поле  $U(x, t)$ . Хорошо известно, что уравнение движения (уравнение Ньютона)

$$m\ddot{x} = F_x(x, t) = -\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \quad (1.1)$$

с начальными условиями  $x(t_0) = x_0$ ,  $\dot{x}(t_0) = v_0$  имеет единственное решение  $x(t)$ . Если потенциальная энергия не зависит от  $t$ , т. е.  $U = U(x)$ , то при движении в таком поле сохраняется энергия

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + U(x) = \text{const}, \quad (1.2)$$

что можно проверить прямым дифференцированием по времени

$$\frac{dE}{dt} = \left( m\ddot{x} + \frac{dU(x)}{dx} \right) \dot{x} = 0.$$

Энергия представляет собой пример *интеграла движения*, т. е. функции координат и скоростей, которая сохраняется при движении системы. Для одномерного движения наличие такого интеграла движения даёт возможность вместо уравнения второго порядка (1) использовать уравнение первого порядка (2) и найти в квадратурах закон движения  $x(t)$ .

Действительно, по начальным данным находим константу

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 + U(x_0),$$

после чего в уравнении первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]} \quad (\text{для } \dot{x} \geq 0) \quad (1.3)$$

переменные разделяются и ответ в квадратурах имеет вид

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + t_0. \quad (1.4)$$

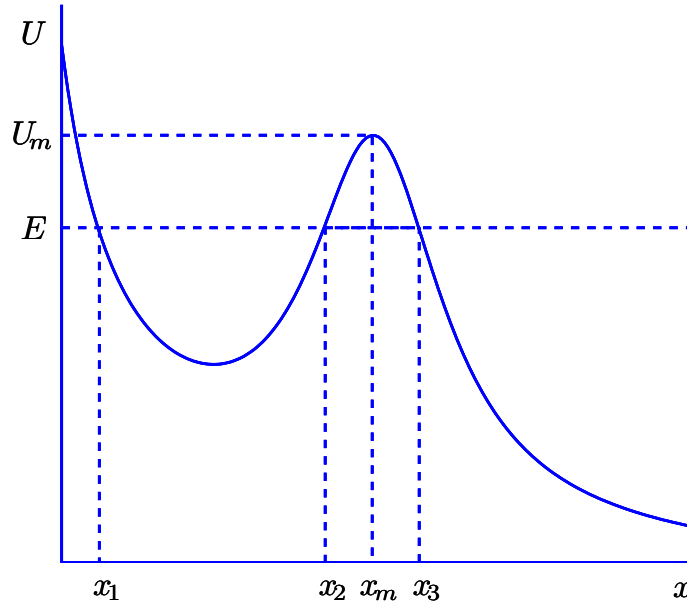


Рис. 1. Границы движения в потенциальном поле

Точки  $x_i$ , в которых  $U(x_i) = E$ , определяют границы области движения частицы. В этих точках скорость  $v_i = 0$ , но ускорение  $a_i = -U'(x_i)/m$  может быть отлично от нуля. Рассмотрим пример потенциальной энергии с локальным максимумом  $U_m$  (рис. 1). Поскольку кинетическая энергия  $T = E - U(x) > 0$ , то при энергии  $E < U_m$  движение возможно лишь в двух областях: в интервале  $x_1 < x < x_2$  и на полупрямой  $x > x_3$ . Ускорения  $a_{1,2,3} \neq 0$ , причем  $a_{1,3} > 0$ ,  $a_2 < 0$ , поэтому вблизи точек  $x_{1,2,3}$  движение оказывается приближенно равноускоренным и эти точки являются точками поворота. В области  $x_1 < x < x_2$  частица совершает колебания (движение *финитное*) с периодом

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (1.5)$$

В области  $x > x_3$  частица уходит на бесконечность, её движение *инфинитно*.

Особый случай — движение частицы с энергией, равной величине локального максимума,  $E = U_m$ . В этом случае в точке локального максимума  $x_m$  сила  $F_x(x_m) = -U'(x_m)/m = 0$ , т. е. не только скорость, но и ускорение частицы обращаются в нуль. Пусть, например,  $U'(x_m) = 0$ , но  $U''(x_m) \neq 0$ . В этом случае вблизи точки  $x_m$  потенциальная энергия имеет вид

$$U(x) = U_m + \frac{1}{2}U''(x_m)(x - x_m)^2 + \dots, \quad U''(x_m) < 0$$

и решение уравнения (4), соответствующее приближению к точке  $x_m$ , таково

$$x(t) = x_m - (x_m - x_0) e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \lambda = \sqrt{-\frac{U''(x_m)}{m}},$$

т. е.  $x(t) \rightarrow x_m$  лишь при  $t \rightarrow \infty$ . Таким образом, в рассматриваемом случае приближение частицы к точке  $x_m$  слева или справа будет происходить бесконечно долго. Отсюда, в частности, следует, что период колебаний (5) обращается в бесконечность, когда энергия  $E \rightarrow U_m$ .

## Задачи

**1.1.** Описать качественно характер движения частицы массы  $m$  в поле (при  $x > 0$ )

$$U(x) = V \frac{a^2}{x^2} \left(1 - \frac{a}{x}\right)^2$$

при различных значениях энергии частицы.

**1.2.** Найти закон движения частицы в поле  $U(x) = -Ax^4$ , если её энергия равна нулю. Тот же вопрос для поля  $U(x) = -kx^2$ .

**1.3.** При длительном наблюдении финитного движения частицы можно говорить о распределении вероятностей обнаружить частицу вблизи точки  $x$ . Точнее, вероятность  $dw$  обнаружить частицу в интервале  $(x, x + dx)$  можно определить как отношение времени ее пребывания на этом интервале  $dt$  к полупериоду ее движения:  $dw = 2 dt/T$ . Найти плотность вероятности  $dw(x)/dx$  для движения частицы в осцилляторном поле  $U(x) = m\omega^2 x^2/2$  с амплитудой  $a$ .

## § 2. Движение в центральном поле

Потенциальная энергия *центрального поля* зависит лишь от модуля радиуса-вектора  $U(\mathbf{r}) \equiv U(r)$ . Движение частицы в центральном поле — это и движение планеты в Солнечной системе, и движение электрона в атоме. К тому же это один из немногих примеров задач, решаемых в квадратурах при произвольной зависимости  $U(r)$ . Разумеется, уравнения движения частицы можно интегрировать численно. Однако определение закона движения “в лоб” на длительное время в сколько-нибудь сложных условиях — задача, превосходящая возможности даже мощных компьютеров.

Большое число учебных задач можно найти в [3] § 2. Обратим внимание на простые и точно решаемые задачи 2.3 и 2.5 и на интересную задачу 2.36, несколько выходящую за рамки необходимого минимума.

## 2.1. Радиальное движение

При движении частицы в центральном поле сила<sup>1</sup>

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{dU}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

направлена по радиус-вектору или против него и потому сохраняется не только энергия

$$E = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + U(r), \quad (2.1)$$

но и момент импульса

$$\mathbf{M} = m[\mathbf{r}, \mathbf{v}], \quad (2.2)$$

так как

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}] = 0.$$

Из уравнения (2) следует, что орбита частицы находится в плоскости, перпендикулярной постоянному вектору  $\mathbf{M}$ ; пусть это будет  $xy$ -плоскость. Вводя полярные координаты  $r$  и  $\varphi$  в этой плоскости (рис. 2), получаем

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\varphi})^2 + U(r), \quad (2.3)$$

$$\mathbf{M} = (0, 0, M), \quad M = mr^2\dot{\varphi}. \quad (2.4)$$

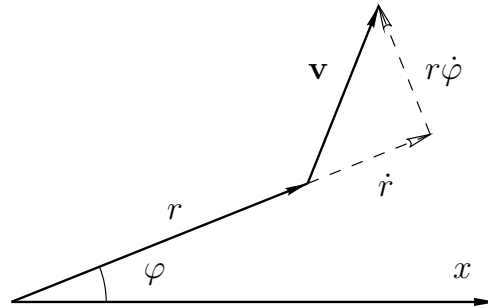


Рис. 2. Компоненты скорости в полярных координатах

Используя (4), исключим  $\dot{\varphi}$  из (3)

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{эф}}(r), \quad U_{\text{эф}}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \quad (2.5)$$

Таким образом, радиальное движение сведено к одномерному движению в поле с *эффективной потенциальной энергией*  $U_{\text{эф}}(r)$ , включающей *центробежную энергию*  $M^2/(2mr^2)$  (ср. (1.2)). Из (5) находим

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U_{\text{эф}}(r)]} \quad (\text{для } \dot{r} \geq 0)$$

<sup>1</sup>Производные по вектору определяются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

или

$$dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{эф}}(r)}}, \quad (2.6)$$

откуда и получаем зависимость  $t(r)$ :

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{эф}}(r)}} + t_0.$$

Это уравнение вполне аналогично уравнению (1.4) для одномерного движения. Поэтому для радиального движения  $r(t)$  можно повторить всё то, что было сказано для зависимости  $x(t)$  в § 1 с заменой потенциальной энергии  $U(x)$  на эффективную потенциальную энергию  $U_{\text{эф}}(r)$ . Так точки  $r_i$ , в которых  $U_{\text{эф}}(r_i) = E$ , определяют границы области движения частицы по радиусу. В этих точках радиальная скорость  $\dot{r}_i = 0$ , но радиальное ускорение  $\ddot{r}_i = -U'_{\text{эф}}(r_i)/m$  обычно отлично от нуля. При этом точки  $r_i$  являются точками поворота для движения частицы по радиусу. Пусть, например, зависимость  $U_{\text{эф}}$  от  $r$  имеет такой же вид, как и зависимость  $U$  от  $x$  на рис. 1. В этом случае при энергии  $E < U_m$  движение возможно лишь в двух областях: финитное движение в интервале  $r_1 < r < r_2$  и инфинитное движение в области  $r > r_3$ . Для финитного движения период радиальных колебаний равен (ср. (1.5))

$$T_r = \sqrt{2m} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{эф}}(r)}}. \quad (2.7)$$

## 2.2. Траектории

Для вывода уравнения траектории используем (4) в форме

$$dt = \frac{mr^2}{M} d\varphi.$$

Затем исключим  $dt$  из (6) и найдем уравнение траектории:

$$\varphi = \pm \frac{M}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{\text{эф}}(r)}} + \varphi_0. \quad (2.8)$$

Следует учесть, что угловая скорость  $\dot{\varphi} = M/(mr^2)$  имеет один и тот же знак для всей траектории и отлична от нуля в точках поворота радиального движения  $r_i$ . Поэтому траектория в этих точках проходит по касательной к окружности радиуса  $r_i$ . Примерный вид траекторий финитного движения показан на рис. 3 для случая, когда за время одного оборота  $T_\varphi$  совершается чуть менее одного радиального колебания ( $T_\varphi < T_r$ ) и на рис. 4 для случая, когда за один оборот совершается несколько радиальных колебаний ( $T_\varphi > 4T_r$ ).

Закону сохранения момента импульса (2), (4) можно придать наглядный геометрический смысл, используя понятие секториальной скорости. Пусть за время  $dt$  частица сместится из точки  $\mathbf{r}$  на расстояние  $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ . Радиус-вектор частицы за это время повернется на угол  $d\varphi$  и “заметёт” элементарный сектор, образованный радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , радиус-вектором  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  и элементом траектории частицы. Площадь этого сектора равна  $dS = r^2 d\varphi/2$ . *Секториальной скоростью* называется величина

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}, \quad (2.9)$$

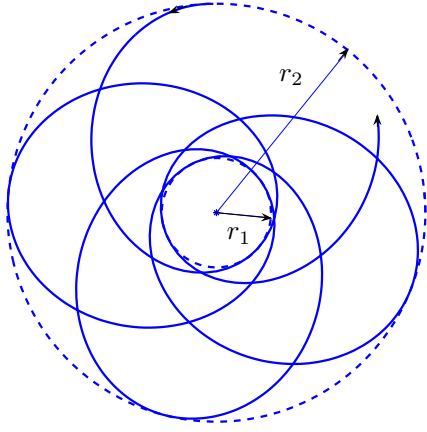


Рис. 3. Траектория финитного движения при  $T_\varphi < T_r$

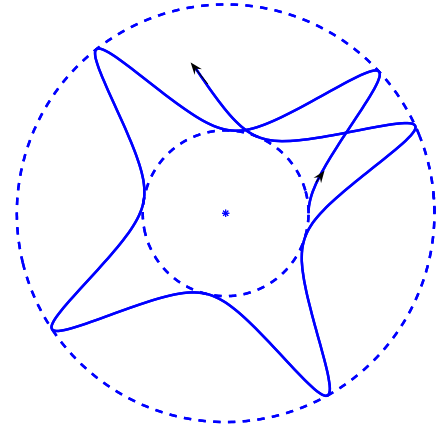


Рис. 4. Траектория финитного движения при  $T_\varphi > 4T_r$

равная площади, заметаемой радиус-вектором частицы в единицу времени. Секториальная скорость связана с моментом импульса соотношением

$$M = 2m \frac{dS}{dt}, \quad (2.10)$$

поэтому сохранение момента импульса означает, что *секториальная скорость в центральном поле является постоянной величиной*.

## Задача

**2.1.** Частица падает в центр поля  $U(r) = -\alpha r^{-n}$  с конечного расстояния ( $n \geq 2$ ). Будет ли число оборотов вокруг центра, сделанных при этом частицей, конечным? Будет ли конечным время падения? Найти уравнение траектории для малых  $r$ .

## § 3. Задача Кеплера

Рассмотрим движение частицы в потенциальном поле

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}. \quad (3.1a)$$

Здесь  $\alpha = Gm m_\odot$  для движения планеты массы  $m$  в гравитационном поле Солнца ( $m_\odot$  — масса Солнца,  $G$  — гравитационная постоянная) или  $\alpha = e^2$  для движения электрона в электрическом поле протона (атом водорода)<sup>2</sup>.

### 3.1. Траектории

Эффективная потенциальная энергия для данного поля

$$U_{\text{эф}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \quad (3.2)$$

<sup>2</sup>На самом деле, движение электрона в атоме определяется не классической, а квантовой механикой. Классическое описание приближенно справедливо для высоко возбужденных (так называемых *ридберговских*) состояний атома водорода.

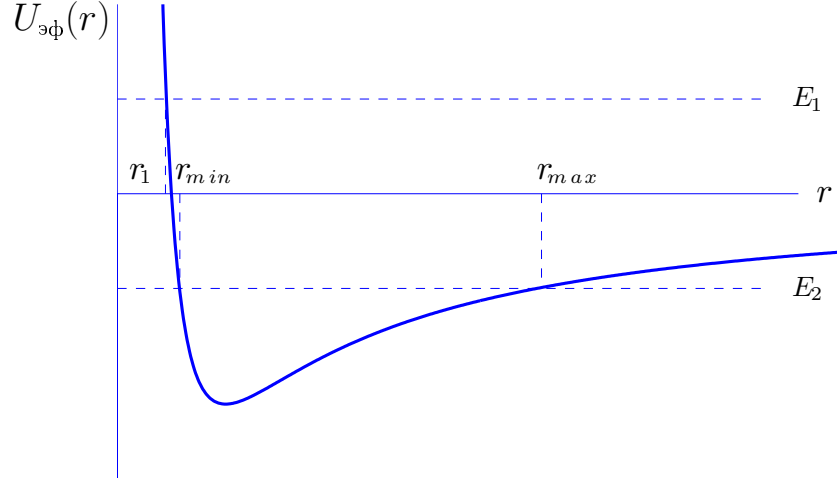


Рис. 5. Эффективная потенциальная энергия  $U_{\text{эф}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$

изображена на рис. 5. Из него видно, что:

если  $E \geq 0$ , то частица, приходящая из бесконечности, будет отражена в точке  $r_1$  и снова уйдет на бесконечность;

если  $E < 0$ , то частица испытывает радиальные колебания в ограниченной области  $r_{\min} < r < r_{\max}$ ;

если  $E = -m\alpha^2/(2M^2)$ , то частица движется по окружности радиуса  $r = M^2/(m\alpha)$ .

Траектория движения определяется из уравнения (2.8):

$$\varphi = \pm \int \frac{M}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}}} + \text{const}. \quad (3.3)$$

Если ввести безразмерную переменную

$$u = \frac{p}{r}, \quad p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad (3.4)$$

то получим

$$\varphi = \mp \int \frac{du}{\sqrt{e^2 - (u-1)^2}} + \varphi_0, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}. \quad (3.5)$$

Дальнейшее интегрирование выполняется элементарно:

$$\varphi = \pm \arccos \frac{u-1}{e} + \varphi_0,$$

или

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Выбирая  $\varphi_0 = 0$ , имеем  $r = r_{\min}$  при  $\varphi = 0$  (для движения планеты эта точка называется *перигелием*). В результате получаем уравнение траектории в виде

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad (3.6)$$

где  $e$  — эксцентриситет, а  $p$  — параметр орбиты.

Уравнение (6) задает известные кривые, соответствующие коническим сечениям:  
 гипербола для  $e > 1$  (при  $E > 0$ ),  
 парабола для  $e = 1$  (при  $E = 0$ ),  
 эллипс для  $e < 1$  (при  $E < 0$ ).

При  $E = -m\alpha^2/(2M^2)$  эксцентриситет  $e = 0$ , а траектория — окружность.  
 Отметим наконец, что параметр  $p$  равен значению радиуса при  $\varphi = \pi/2$ :

$$p = \frac{M^2}{m\alpha} = r|_{\varphi=\pi/2}.$$

Легко показать, что для поля отталкивания

$$U(r) = \frac{\alpha}{r}, \quad (3.1b)$$

уравнение траектории таково

$$r = \frac{p}{-1 + e \cos \varphi}, \quad (3.6b)$$

где величины  $e$  и  $p$  определяются теми же формулами (4), (5) что и для поля притяжения (1a). В этом случае энергия  $E > 0$ , эксцентриситет  $e > 1$  и траектория является гиперболой (наш выбор начальных данных соответствует  $r = r_{\min} = p/(-1 + e)$  при  $\varphi = 0$ ).

### 3.2. Эллиптическая траектория. Законы Кеплера

Рассмотрим более подробно важный случай  $E < 0$ . В этом случае траектория — эллипс с центром  $C$ , фокусом  $O$ , большой полуосью  $a = CA = (1/2)DA$ , малой

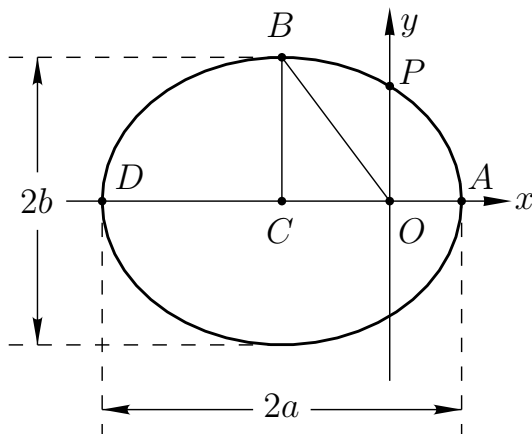


Рис. 6. Элементы эллиптической траектории

полуосью  $b = CB$  и параметром траектории  $p = OP$  (рис. 6). Напомним, что эллипс определяется как геометрическое место точек, сумма расстояний до которых от двух фокусов остается постоянной (и равной  $2a$ ). Тот факт, что планеты движутся по эллипсам, в фокусе которых расположено Солнце, составляет содержание *первого закона Кеплера*.



Поскольку рассматриваемое поле является центральным, для него справедлив закон сохранения секториальной скорости, который можно сформулировать в таком виде — за равные промежутки времени радиус-вектор планеты замечает одинаковые площади (*второй закон Кеплера*).

Нетрудно показать, что большая полуось зависит только от энергии (но не от момента импульса):

$$a = \frac{1}{2}(OA + DO) = \frac{1}{2}(r_{\min} + r_{\max}) = \frac{1}{2} \left( \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \right) = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}. \quad (3.7)$$

Расстояние от центра эллипса  $C$  до фокуса  $O$  равно

$$CO = \frac{1}{2}(DO - OA) = \frac{1}{2}(r_{\max} - r_{\min}) = ae. \quad (3.8)$$

В прямоугольном треугольнике  $COB$  сторона  $OB = a$ , поэтому

$$b = CB = a\sqrt{1-e^2}. \quad (3.9)$$

Подставив  $e$  из (5), видим, что  $b$  зависит не только от энергии, но и от момента импульса:

$$b = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}. \quad (3.10)$$

Наконец, выпишем полезные соотношения:

$$r_{\min} = (1-e)a, \quad r_{\max} = (1+e)a, \quad p = (1-e^2)a. \quad (3.11)$$

Уравнение траектории можно представить, сместив начало отсчета в центр эллипса  $x = x' - ae$ , в виде

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

или в параметрическом виде

$$x' = x + ae = a \cos \xi, \quad y = b \sin \xi. \quad (3.12)$$

Выразим момент импульса через  $\xi$  и  $\dot{\xi}$ :

$$M = m(xy - y\dot{x}) = ma(\cos \xi - e) b \dot{\xi} \sin \xi - mb \sin \xi a \dot{\xi} \sin \xi = tab(1 - e \cos \xi) \dot{\xi}.$$

Интегрируя это соотношение, находим уравнение, определяющее зависимость параметра  $\xi$  от времени,

$$\xi - e \sin \xi = \frac{M}{tab} (t - t_0), \quad (3.13a)$$

где  $t_0$  — константа интегрирования. Момент времени  $t = t_0$  соответствует прохождению частицей перигелия. Уравнения (12) и (13a) определяют (в параметрическом виде) зависимость декартовых координат частицы от времени.

Полное время одного оборота по эллипсу  $T$  соответствует изменению параметра  $\xi$  на  $2\pi$ . Поэтому период обращения

$$T = 2\pi \frac{tab}{M},$$

а уравнение (13а) может быть представлено также в виде

$$\xi - e \sin \xi = \frac{2\pi}{T} (t - t_0). \quad (3.13b)$$

С учетом (7), (10) имеем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}. \quad (3.14)$$

Отсюда следует *третий закон Кеплера*:

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{m}{\alpha} = \frac{4\pi^2}{Gm_C}, \quad (3.15)$$

т. е. для всех планет отношение квадрата периода обращения к кубу большой полуоси эллипса оказывается одинаковым. Обратим внимание на то, что период обращения зависит от большой полуоси эллипса, т. е. только от энергии  $E$ , но не от момента импульса  $M$ .

### 3.3. Дополнительный интеграл движения в задаче Кеплера

При движении в кулоновском поле помимо энергии и момента импульса существует ещё дополнительный интеграл движения, обнаруженный Лапласом. Чтобы найти его, удобно рассмотреть закон изменения с течением времени единичного вектора  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ . При движении частицы этот вектор вращается с угловой скоростью  $\dot{\varphi}$  в плоскости орбиты, а малое изменение этого вектора  $d\mathbf{n}$  перпендикулярно ему самому и вектору момента импульса  $\mathbf{M}$ . Таким образом, скорость изменения этого вектора по величине совпадает с  $\dot{\varphi} = M/(mr^2)$  и направлена вдоль вектора  $\mathbf{M} \times \mathbf{n}$ , т. е.

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \frac{\mathbf{M}}{mr^2} \times \mathbf{n}. \quad (3.16)$$

Так как уравнение движения в кулоновском поле (1а) имеет вид

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\alpha}{r^2} \mathbf{n},$$

то (16) можно переписать как

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = -\frac{\mathbf{M}}{\alpha} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

или

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{v} \times \mathbf{M} - \alpha \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = 0.$$

Отсюда следует, что в кулоновском поле  $U(r) = -\alpha/r$  существует дополнительный интеграл движения — *вектор Лапласа* (называемый иногда также вектором Рунге-Ленца)

$$\mathbf{A} = [\mathbf{v}, \mathbf{M}] - \alpha \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3.17a)$$

Из вывода очевидно, что в кулоновском поле отталкивания  $U(r) = \alpha/r$  вектор Лапласа имеет вид

$$\mathbf{A} = [\mathbf{v}, \mathbf{M}] + \alpha \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3.17b)$$

Чтобы выяснить наглядную интерпретацию вектора  $\mathbf{A}$ , рассмотрим скалярное произведение векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{A}$ . Обозначив через  $\varphi$  угол между этими векторами, найдем

$$\mathbf{r}\mathbf{A} = rA \cos \varphi = \mathbf{r} [\mathbf{v}, \mathbf{M}] - \alpha r = \frac{M^2}{m} - \alpha r = \alpha(p - r),$$

где  $p = M^2/(m\alpha)$ , или

$$r = \frac{p}{1 + (A/\alpha) \cos \varphi}. \quad (3.18)$$

Сравнив это выражение с формулой (6), немедленно установим, что вектор  $\mathbf{A}$  направлен из центра поля в точку  $r = r_{\min}$  (к перигелию планеты) и модуль этого вектора пропорционален эксцентриситету:

$$|\mathbf{A}| = \alpha e. \quad (3.19)$$

Таким образом, в задаче Кеплера мы нашли семь интегралов движения: энергию  $E$  и по три проекции векторов  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{A}$ . Однако независимыми являются только пять из них, поскольку модуль вектора  $\mathbf{A}$ , согласно (19) и (5), определяется энергией и моментом импульса, а плоскость, в которой лежит этот вектор, ортогональна вектору  $\mathbf{M}$ . Возможный набор из пяти независимых интегралов движения таков:  $E$  и  $\mathbf{M}$  дают четыре интеграла и определяют плоскость орбиты и параметры эллипса, но не его ориентацию в плоскости, пятым независимым интегралом является направление вектора  $\mathbf{A}$ , дающее положение перигелия орбиты.

### 3.4. Движение в центральном поле $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$

Эффективная потенциальная энергия для этого поля

$$U_{\text{эф}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\tilde{M}^2}{2mr^2}, \quad \tilde{M} = \sqrt{M^2 + 2m\beta} \quad (3.20)$$

имеет качественно тот же вид, что и кривая  $U_{\text{эф}}(r)$  на рис. 5. Траектория движения определяется из уравнения (2.8):

$$\varphi = \pm \int \frac{M}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{\tilde{M}^2}{r^2}}} + \varphi_0. \quad (3.21)$$

Запишем это уравнение в виде

$$\gamma\varphi = \pm \int \frac{\tilde{M}}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{\tilde{M}^2}{r^2}}} + \text{const}, \quad \gamma = \frac{\tilde{M}}{M} = \sqrt{1 + \frac{2m\beta}{M^2}}, \quad (3.22)$$

который отличается от уравнения (3) для кулоновского поля лишь заменами  $M \rightarrow \tilde{M}$ ,  $\varphi \rightarrow \gamma\varphi$ . В результате получаем уравнение траектории в виде

$$r = \frac{\tilde{p}}{1 + \tilde{e} \cos(\gamma\varphi)}, \quad (3.23)$$

где введены обозначения

$$\tilde{p} = \frac{\tilde{M}^2}{m\alpha}, \quad \tilde{e} = \sqrt{1 + \frac{2E\tilde{M}^2}{m\alpha^2}}. \quad (3.24)$$

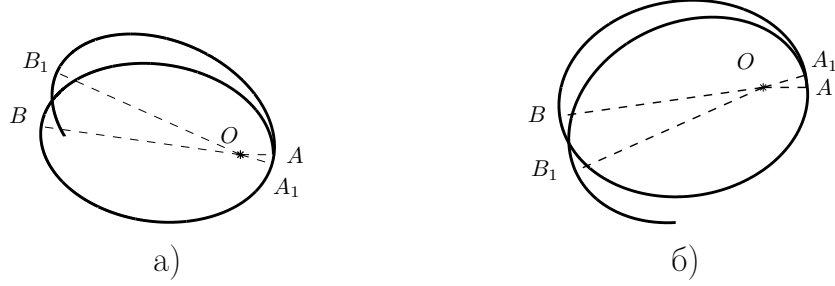


Рис. 7. Траектория, описываемая формулой (3.23) для случая  $E < 0$ : а) при  $\beta > 0$  и б) при  $\beta < 0$

Для случая  $E < 0$  (при этом  $\tilde{e} < 1$ ) траектории изображены на рис. 7, а при  $\beta > 0$  и на рис. 7, б при  $\beta < 0$ . Точки  $A, B, A_1$  соответствуют движению от перигелия  $A$  до апогелия  $B$  за первый полупериод радиального колебания, а затем до перигелия  $A_1$  за второй полупериод радиального колебания. За одно радиальное колебание частицы её полярный угол изменится на

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\gamma}, \quad (3.25)$$

поэтому точка, в которой траектория касается окружности  $r = r_{\min}$ , смещается на угол

$$\delta\varphi = \angle AOA_1 = \frac{2\pi}{\gamma} - 2\pi, \quad (3.26)$$

причём  $\delta\varphi < 0$  (перигелий смещается по часовой стрелке) при  $\beta > 0$  и  $\delta\varphi > 0$  (перигелий смещается против часовой стрелке) при  $\beta < 0$ .

При произвольном значении момента импульса параметр  $\gamma$  в общем случае окажется иррациональным числом, и потому траектория представляет собой незамкнутую кривую, расположенную в кольце между окружностями  $r = r_{\min} = \tilde{p}/(1 + \tilde{e})$  и  $r = r_{\max} = \tilde{p}/(1 - \tilde{e})$ . Эта кривая плотно заполняет кольцо, проходя как угодно близко к любой его точке.

Если же значение момента импульса таково, что параметр  $\gamma$  является рациональной дробью,  $\gamma = n_1/n_2$ , и  $n_{1,2}$  — целые числа, то траектория оказывается замкнутой кривой: совершив  $n_1$  радиальных колебаний и  $n_2$  полных оборотов, частица вернется в исходную точку на траектории.

Рассмотренный пример типичен для движения в центральном поле, которое мы разделили на два движения: по углу  $\varphi$  и радиусу  $r$ . При финитном движении и то и другое движение является периодическим, но периоды  $T_\varphi$  и  $T_r$ , вообще говоря, несоизмеримы и потому траектория финитного движения, вообще говоря, не замкнута.

Иначе говоря, при финитном движении в произвольном центральном поле частица движется так, что угол поворота частицы за период одного радиального колебания  $\Delta\varphi$  в общем случае (при произвольных значениях момента импульса и энергии, допустимых при финитном движении) несоизмерим с углом полного оборота  $2\pi$ , т. е. отношение  $2\pi/\Delta\varphi$  является иррациональным числом и траектория не является замкнутой кривой. Можно показать (см., например, [4, § 8]), что исключениями являются только кулоновское поле  $U(r) = -\alpha/r$ , в котором  $2\pi/\Delta\varphi = 1$  (или  $T_\varphi = T_r$ ), и поле изотропного осциллятора  $U(r) = kr^2/2$ , в котором  $2\pi/\Delta\varphi = 2$  (или  $T_\varphi = 2T_r$ ) см. ниже § 4. В этих полях траектории финитного движения являются замкнутыми кривыми при произвольных значениях момента импульса (и при  $E < 0$  для кулоновского поля и  $E > 0$  для изотропного осциллятора). Оказывается, что в этих же полях имеется дополнительная симметрия и дополнительные (помимо энергии и момента импульса) интегралы движения.

## Задача

**3.1.** Космический корабль движется по круговой орбите вокруг Земли. От него с относительной скоростью  $v = 160$  м/с, направленной к Земле, отделяется тело, масса которого мала по сравнению с массой корабля. Найти ориентацию и параметры орбиты тела. Оценить, через какое время космический корабль и тело окажутся по разные стороны от Земли.

## § 4. Изотропный осциллятор

Поле изотропного трёхмерного осциллятора

$$U(r) = \frac{1}{2} kr^2 \quad (4.1)$$

представляет ещё один важный пример центрального поля. Движение в таком поле происходит в плоскости  $xy$ , перпендикулярной постоянному вектору момента импульса  $M$ . Траектория этого движения может быть найдена по общим формулам § 2. Удобнее, однако, воспользоваться уравнениями движения в декартовых координатах, в которых уравнения расцепляются

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \ddot{y} = -\omega^2 y, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (4.2)$$

и решение которых хорошо известны:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha), \quad y(t) = B \cos(\omega t + \beta), \quad (4.3)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  — константы, которые определяются из начальных условий.

Движение происходит по эллипсу. Чтобы показать это, избавимся в уравнениях (3) от времени. Заметим, что

$$\cos(\omega t + \beta) = \cos \delta \cos(\omega t + \alpha) - \sin \delta \sin(\omega t + \alpha), \quad \delta = \beta - \alpha,$$

$$y = x \frac{B}{A} \cos \delta - B \sin \delta \sin(\omega t + \alpha)$$

и что из уравнений (3) следует

$$\cos^2(\omega t + \alpha) + \sin^2(\omega t + \alpha) = \frac{x^2}{A^2} + \frac{1}{B^2 \sin^2 \delta} \left( y - \frac{B}{A} x \cos \delta \right)^2 = 1. \quad (4.4)$$

Это есть уравнение эллипса, оси которого не совпадают с осями  $xy$ .

Сделав подходящий поворот в плоскости  $xy$  и сдвиг по времени, преобразуем (4) к сумме квадратов

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (4.5)$$

а (3) к стандартному виду

$$x(t) = a \cos \omega t, \quad y(t) = b \sin \omega t, \quad (4.6)$$

который соответствует начальным данным  $\mathbf{r}_0 = (a, 0, 0)$ ,  $\mathbf{v}_0 = (0, b\omega, 0)$ . Отсюда видно, что траектория движения — эллипс с полуосями  $a$  и  $b$ , центр которого совпадает с центром поля.

Период обращения  $T = 2\pi/\omega$  оказывается вдвое больше периода радиальных колебаний  $T_r = \pi/\omega$ .

Найдем полный набор интегралов, однозначно определяющих траекторию. Как и в задаче Кеплера, их пять. В качестве независимых можно взять вектор момента импульса  $\mathbf{M}$ , и две энергии  $E_x$  и  $E_y$  независимых колебаний по осям  $x$  и  $y$ . Заданных значений  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $M$  достаточно для определения  $A, B, \delta$ , поскольку  $E_x = kA^2/2$ ,  $E_y = kB^2/2$ ,  $M = mAB\omega \sin \delta$ . Ясно, что любая функция интегралов движения есть интеграл движения. Некоторые имеют очевидный смысл, например полная энергия  $E = E_x + E_y$ , другие менее очевидны, например

$$N = m\dot{x}y + kxy. \quad (4.7)$$

Сохранение  $N$  проверяется дифференцированием по времени с учетом уравнений движения (2).

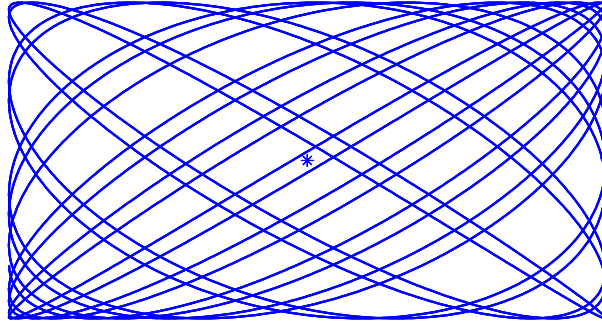


Рис. 8. Траектория движения в поле (4.1) с малой добавкой  $\delta U = k_1 x^2/2$

Если помимо поля (1) имеется малая добавка (возмущение)  $\delta U$ , то траектория может измениться качественно. Ограничимся двумя примерами для случая движения в плоскости  $xy$ . Если, например,  $\delta U = k_1 x^2/2$ , то

$$x(t) = a \cos \omega_1 t, \quad y(t) = b \sin \omega t, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k + k_1}{m}}, \quad (4.8)$$

так что траектория перестает быть замкнутой и заполняет всюду плотно прямоугольник  $|x| \leq a$ ,  $|y| \leq b$  (рис. 8). В качестве другого примера можно привести центрально симметричное возмущение  $\delta U = \delta U(x^2 + y^2)$ . Здесь траектория также перестает быть замкнутой и представляет собой прецессирующий эллипс (рис. 9). Заметим, что в каждом из этих случаев возмущение уменьшает число интегралов

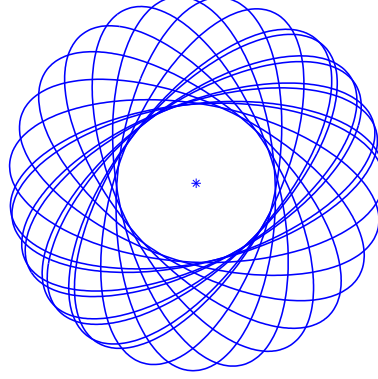


Рис. 9. Траектория движения в поле (4.1) с малой добавкой  $\delta U = \beta/r^4$

движения. В первом случае перестает сохраняться момент импульса из-за исчезновения центральной симметрии поля, а во втором — не сохраняются отдельно энергии  $E_x$  и  $E_y$ , а сохраняется только полная энергия.

## § 5. Задача двух тел

Рассмотрим замкнутую систему тел, состоящую из двух частиц, потенциальная энергия взаимодействия которых  $U = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ . Их уравнения движения

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_1}, \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (5.1)$$

можно существенно упростить, если ввести вместо переменных  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  новые переменные — координаты центра инерции

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

и относительное расстояние  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . В этих переменных уравнения (1) разделяются:

$$\ddot{\mathbf{R}} = 0, \quad m \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}}, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.2)$$

Таким образом, задача двух тел сводится к равномерному и прямолинейному движению центра инерции системы  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}t$  и к движению одной частицы с *приведенной массой*  $m$  под действием силы

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}}.$$

## § 6. Сечение рассеяния. Формула Резерфорда

### 6.1. Постановка задачи рассеяния

Эксперимент по рассеянию частиц обычно проводится так. Пучок частиц, движущийся вдоль определенной оси (скажем, оси  $z$ ), падает на мишень, а рассеянные частицы регистрируются детектором, расположенном на большом расстоянии  $R$  от мишени. Изучение зависимости числа рассеянных частиц от углов рассеяния и энергии налетающих частиц может дать ценные сведения о природе сил взаимодействия, о структуре мишени и т. д. Если мишень достаточно тонкая (так что повторными соударениями можно пренебречь) и рассеяние на отдельных рассеивающих центрах мишени происходит независимо, то задача по существу сводится к задаче о рассеянии частиц с приведенной массой на потенциальном поле  $U(\mathbf{r})$ , соответствующем взаимодействию частицы из падающего потока с одним рассеивающим центром мишени. Таким образом, мы приходим к следующей постановке задачи рассеяния.

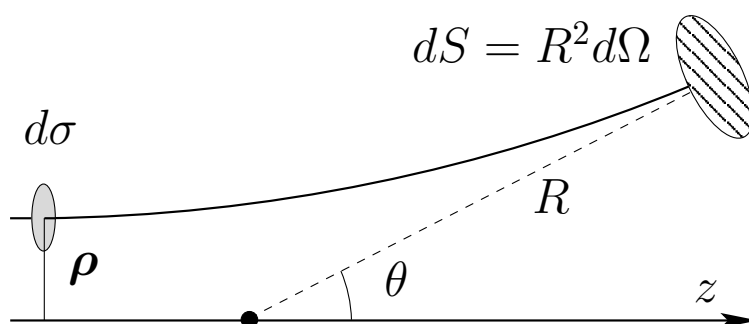


Рис. 10. Задача рассеяния

Пусть концентрация частиц в падающем потоке равна  $n$ , а их скорость равна  $\mathbf{v}_\infty = (0, 0, v_\infty)$ , тогда плотность их потока  $j = nv_\infty$ . После рассеяния некоторое число частиц попадет в детектор на площадку  $dS = R^2 d\Omega$  с угловым размером  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ , расположенную на большом расстоянии  $R$  от начала координат (рис. 10). Число частиц  $d\dot{N}$ , попавших в единицу времени на эту площадку, прямо пропорционально величине  $j$ , а отношение  $d\dot{N}/j$  уже не зависит от плотности потока и определяется свойствами потенциала взаимодействия  $U(\mathbf{r})$  и начальными условиями. Если проследить за траекториями частиц, попавших на площадку  $dS$ , то можно указать начальную площадку  $d\sigma$  (расположенную перпендикулярно к оси  $z$ ), через которую эти частицы прошли на начальном этапе движения, имея скорость  $\mathbf{v}_\infty$  и прицельный параметр  $\boldsymbol{\rho} = (\rho_x, \rho_y, 0)$ . В реальном эксперименте прицельные параметры обычно являются микроскопически малыми и непосредственно не наблюдаются.

Число частиц, прошедших в единицу времени через площадку  $d\sigma \equiv d^2\rho = d\rho_x d\rho_y$ , равно  $j d\sigma$  и совпадает с числом частиц  $d\dot{N}$ , прошедших в единицу времени через площадку  $dS$ . Таким образом, именно величина

$$d\sigma(\theta, \varphi, E) = \frac{d\dot{N}(\theta, \varphi, E)}{j(E)} \quad (6.1)$$

является удобной характеристикой процесса рассеяния. Она может быть определена из эксперимента при измерении числа попавших в детектор частиц. Полученная



после интегрирования по углам рассеяния величина  $\sigma$  называется *полным эффективным сечением рассеяния* (или просто *сечением рассеяния*), а величина

$$\frac{d\sigma(\theta, \varphi, E)}{d\Omega} = \left| \frac{d^2\rho(\theta, \varphi, E)}{d\Omega} \right| \quad (6.2)$$

называется *дифференциальным эффективным сечением рассеяния*<sup>3</sup>.

Из этих определений видно, что как  $\sigma$ , так и  $d\sigma/d\Omega$  являются положительными величинами и что сечение  $\sigma$  равно полному числу частиц, рассеянных в единицу времени силовым центром при единичной плотности потока падающих на этот центр частиц. Если силовой центр таков, что сила  $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$  исчезает лишь на бесконечности, то все частицы падающего потока непременно отклоняются, так что полное число рассеянных таким центром частиц  $\dot{N}$  бесконечно, и, следовательно, полное сечение также обращается в бесконечность при интегрировании по всем углам рассеяния. В частности, если на больших расстояниях  $U(\mathbf{r}) \sim \alpha/r^n$ ,  $n > 0$ , то  $\sigma = \infty$ .

Рассмотрим пример упругого соударения, когда частицы налетающего потока представляют собой шарики радиуса  $R_1$ , а частицы мишени — шарики радиуса  $R_2$ . В этом случае рассеянными окажутся только частицы с прицельными параметрами  $\rho \leq R_1 + R_2$ , т. е. полное сечение  $\sigma = \pi(R_1 + R_2)^2$ .

Если потенциальное поле  $U$  является центральным, то дифференциальное сечение рассеяния не зависит от азимутального угла  $\varphi$  и

$$\frac{d\sigma(\theta, E)}{d\Omega} = \left| \frac{d(\pi\rho^2)}{2\pi \sin\theta d\theta} \right| = \frac{\rho(\theta, E)}{\sin\theta} \left| \frac{d\rho(\theta, E)}{d\theta} \right|. \quad (6.3)$$

В этом случае для вычисления дифференциального сечения рассеяния достаточно знать  $\rho(\theta, E)$  — прицельный параметр падающей частицы как функцию ее угла рассеяния и энергии.

До сих пор мы рассматривали *упругое рассеяние* частиц. Очевидно, что понятие сечения можно распространить на случай, когда частицы падают на силовой центр, или на случай, когда при соударении частиц происходят реакции с образованием новых частиц. При описании таких процессов естественным образом возникает *сечение падения* или *сечение неупругого рассеяния*. При рассеянии на частицах, масса которых сравнима с массой налетающих частиц, можно рассматривать *сечение, дифференциальное по величине энергии, переданной при столкновении частицам мишени*.

## 6.2. Рассеяние под малыми углами

Вычислим  $\rho(\theta, \varphi, E)$  для важного случая рассеяния быстрых частиц под малыми углами,  $\theta \ll 1$ . Пусть  $\mathbf{p} = (0, 0, mv_\infty)$  и  $\mathbf{p}'$  — начальный и конечный импульсы частицы, для упругого рассеяния величины этих импульсов совпадают  $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|$ . При рассеянии под малыми углами

$$\theta \approx \sin\theta = \frac{p'_\perp}{p}, \quad \text{tg}\varphi = \frac{p'_y}{p'_x}, \quad (6.4)$$

<sup>3</sup>Из формулы (2) видно, что дифференциальное и полное сечения рассеяния имеют размерность площади.

где  $\mathbf{p}'_{\perp} = (p'_x, p'_y, 0)$  — поперечная к оси  $z$  составляющая вектора  $\mathbf{p}'$ . Таким образом, для нахождения углов рассеяния достаточно вычислить поперечные компоненты вектора  $\mathbf{p}'$ .

При таком вычислении учтем, что  $\mathbf{p}'_{\perp} = \Delta\mathbf{p}_{\perp}$ , где  $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$  — полное изменение импульса частицы за все время рассеяния. Так как  $d\mathbf{p} = \mathbf{F}dt$  в силу уравнения Ньютона, то

$$\Delta\mathbf{p} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(t)dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U(\mathbf{r}(t))}{\partial \mathbf{r}} dt.$$

При рассеянии на малые углы в правую часть этого уравнения можно подставить приближённый закон движения

$$\mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}_{\infty} t$$

и получить

$$\mathbf{p}'_{\perp} = - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}_{\infty} t) dt. \quad (6.5)$$

Если потенциальное поле  $U$  является центральным,  $U(r) = U(\sqrt{\rho^2 + (v_{\infty}t)^2})$ , то дифференциальное сечение рассеяния не зависит от азимутального угла  $\varphi$ . Сделав далее замену  $z = v_{\infty}t$ , получим простое выражение для угла рассеяния

$$\theta = \frac{1}{2E} \left| \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{-\infty}^{\infty} U(\sqrt{\rho^2 + z^2}) dz \right|. \quad (6.6)$$

Отсюда находится  $\rho(\theta, E)$  и далее  $d\sigma/d\Omega$ .

### Пример.

Рассмотрим рассеяние в поле  $U(r) = \frac{\alpha}{\sqrt{r^2 + a^2}}$  при условии  $E \gg \frac{\alpha}{a}$ .

Указанное условие означает, что энергия налетающих частиц  $E$  много больше характерной потенциальной энергии  $\alpha/a$ . Рассеяние при этом происходит только на малые углы, которые легко вычислить, используя формулу (6):

$$\theta = \frac{\alpha\rho}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\alpha}{E} \frac{\rho}{\rho^2 + a^2}.$$

График этой функции показан на рис. 11. Максимальный угол рассеяния  $\theta_m$  достигается при  $\rho = a$  и, естественно, оказывается мал:

$$\theta_m = \frac{\alpha}{2Ea} \ll 1.$$

При вычислении сечения необходимо учесть, что на одну и ту же площадку детектора попадут частицы, падающие с двух разных площадок

$$d\sigma_{1,2} = \pi |d\rho_{1,2}^2| = \pm d\rho_{1,2}^2 = \pm \pi \frac{d\rho_{1,2}^2}{d\theta} d\theta$$

для двух возможных прицельных параметров

$$\rho_{1,2} = \left(1 \mp \sqrt{1 - (\theta/\theta_m)^2}\right) \frac{\alpha}{2E\theta},$$

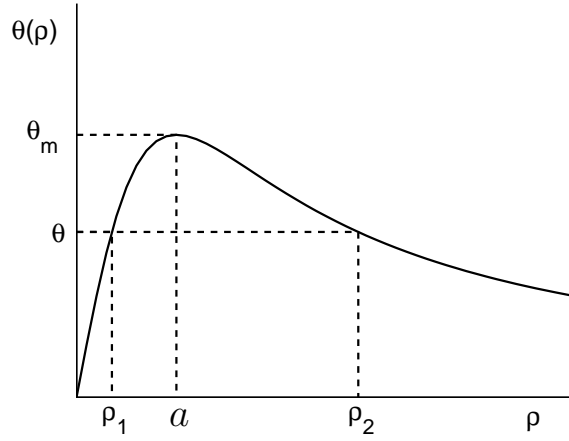


Рис. 11. Зависимость  $\theta(\rho)$  при рассеянии в поле  $U(r) = \alpha/\sqrt{r^2 + a^2}$

поэтому

$$d\sigma = \pi (|d\rho_1^2| + |d\rho_2^2|) = \pi d (\rho_1^2 - \rho_2^2) = \pi d [(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 + \rho_2)] .$$

Отсюда окончательно получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{E^2\theta^4} \frac{1 - \theta^2/(2\theta_m^2)}{\sqrt{1 - (\theta/\theta_m)^2}} & \text{при } \theta < \theta_m , \\ 0 & \text{при } \theta > \theta_m . \end{cases} \quad (6.7)$$

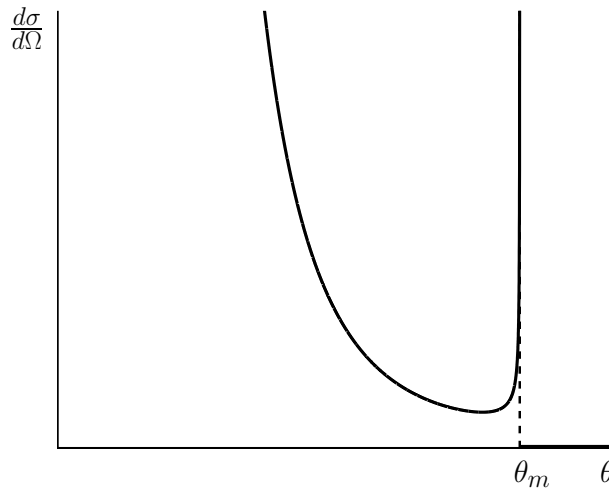


Рис. 12. Дифференциальное сечение рассеяния на малые углы в поле  $U(r) = \frac{\alpha}{\sqrt{r^2 + a^2}}$

Зависимость  $d\sigma/d\Omega$  от  $\theta$  изображена на рис. 12. При  $\theta \rightarrow 0$  дифференциальное сечение  $d\sigma/d\Omega$  неограниченно возрастает:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{\alpha^2}{E^2\theta^4} \rightarrow \infty \text{ при } \theta \rightarrow 0 . \quad (6.8)$$

Сечение рассеяния, проинтегрированное в интервале углов, прилегающих к  $\theta = 0$ , бесконечно, так как рассеяние на малые углы отвечает большим прицельным параметрам.

Дифференциальное сечение  $d\sigma/d\Omega$  неограниченно возрастает также и при  $\theta \rightarrow \theta_m$ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{\alpha^2}{2\sqrt{2}E^2\theta_m^4 \sqrt{1 - (\theta/\theta_m)}} \rightarrow \infty \text{ при } \theta \rightarrow \theta_m. \quad (6.9)$$

Однако сечение рассеяния в интервал углов, прилегающих к  $\theta_m$ , оказывается конечным, т. к. отвечает конечным прицельным параметрам вблизи  $\rho = a$ . Действительно, сечение рассеяния в интервал углов  $\theta_m - \delta < \theta < \theta_m$ , равное

$$\int_{\theta_m - \delta}^{\theta_m} 2\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \theta d\theta = \frac{\pi\alpha^2\delta^{1/2}}{\sqrt{2}E^2\theta_m^{5/2}},$$

конечно и стремится к нулю при  $\delta \rightarrow 0$ . Такая особенность сечения называется *радужным рассеянием* (см. [5, гл. 5, § 5]). Подобного типа особенность сечения приводит к образованию радуги при рассеянии света каплями воды. Примеры радужного рассеяния см. также в задачах 3.8, 3.10 из [3].

### 6.3. Формула Резерфорда

Рассмотрим упругое рассеяние частиц на кулоновском поле отталкивания  $U(r) = \alpha/r$ . Типичная траектория движения частицы с энергией  $E = mv_\infty^2/2$  и прицельным

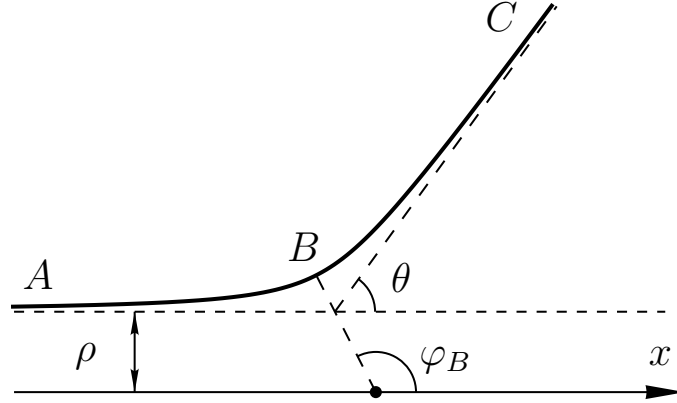


Рис. 13. Траектория рассеяния в кулоновском поле  $U(r) = \alpha/r$

параметром  $\rho$  изображена на рис. 13 в виде гиперболы  $ABC$ , где точки  $A$  и  $C$  соответствуют начальному и конечному участкам траектории, а точка  $B$  — минимальному расстоянию траектории от начала координат. В плоскости траектории (плоскости  $xy$ ) введем полярные координаты  $r$  и  $\varphi$ , тогда уравнение траектории  $ABC$  имеет вид

$$r(\varphi) = \frac{p}{-1 + e \cos(\varphi - \varphi_B)}, \quad (6.10)$$

где величины  $p$  и  $e$  определены в (3.4), (3.5), а  $\varphi_B$  — полярный угол точки  $B$ . Полярные углы  $\varphi_A$  и  $\varphi_C$ , отвечающие точкам  $A$  и  $C$ , и угол рассеяния  $\theta$  связаны с углом  $\varphi_B$  соотношениями:

$$\varphi_A = \pi, \quad \varphi_C = 2\varphi_B - \pi = \theta.$$

Угол  $\varphi_B$  можно найти из требования, чтобы  $r(\varphi_A) = \infty$  или  $-1 + e \cos(\pi - \varphi_B) = 0$ . Учитывая, что

$$\varphi_B = \frac{\pi + \theta}{2}, \quad M^2 = (mv_\infty \rho)^2 = 2mE\rho^2, \quad e^2 = 1 + \left(\frac{2E\rho}{\alpha}\right)^2,$$

находим

$$\rho(\theta) = \frac{\alpha}{2E} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \quad (6.11)$$

и дифференциальное сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}. \quad (6.12)$$

Это сечение быстро убывает с ростом угла рассеяния  $\theta$  и энергии налетающей частицы  $E$  (рис. 14). Легко проверить, что формула (12) справедлива не только для кулоновского поля отталкивания  $U(r) = \alpha/r$ , но и для кулоновского поля притяжения  $U(r) = -\alpha/r$ . При малых углах рассеяния результат (12) совпадает с формулой (8).

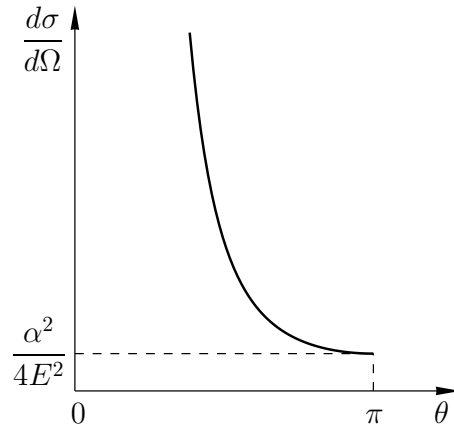


Рис. 14. Дифференциальное сечение рассеяния в кулоновском поле  $U(r) = \pm\alpha/r$

## Задачи

**6.1.** Определить сечение падения частиц, имеющих на бесконечности скорость  $v_\infty$ , на поверхность Земли (радиус Земли равен  $R$ , ускорение свободного падения на поверхности Земли равно  $g$ ).

**6.2.** Найти сечение падения частиц в центр поля

$$U = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}.$$

Как изменится ответ при изменении знака  $\alpha$ ?

**6.3.** Определить дифференциальное эффективное сечение рассеяния частиц на абсолютно упругом неподвижном шаре радиуса  $R$ .

**6.4.** Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния быстрых частиц ( $E \gg V$ ) в поле

$$U(r) = \begin{cases} V \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) & \text{при } r < R, \\ 0 & \text{при } r > R. \end{cases}$$

## § 7. Теорема о вириале

Рассмотрим систему из  $N$  частиц, движение которых совершается в ограниченной области и с ограниченными скоростями. В этом случае для любой динамической величины  $F$ , зависящей от координат и скоростей частиц, можно определить ее среднее за большой промежуток времени  $\tau$  значение:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} F dt.$$

Оказывается, существуют определенные связи между средними значениями потенциальной  $U = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ , кинетической  $T$  и полной энергии  $E = T + U$ .

Назовем *вириалом* системы частиц величину

$$W = \sum_{a=1}^N \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} \mathbf{r}_a. \quad (7.1)$$

Теорема о вириале утверждает, что

$$2\langle T \rangle = \langle W \rangle; \quad (7.2)$$

а если дополнительно потенциальная энергия является однородной функцией степени  $n$ , т. е. если

$$U(\lambda \mathbf{r}_1, \lambda \mathbf{r}_2, \dots, \lambda \mathbf{r}_N) = \lambda^n U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (7.3)$$

то

$$\langle T \rangle = \frac{n}{2} E, \quad \langle U \rangle = \frac{2}{n+2} E. \quad (7.4)$$

Переходя к доказательству этой теоремы, приведем вначале два вспомогательных математических утверждения:

А) Если  $F(t)$  — ограниченная функция, то

$$\left\langle \frac{dF}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{dF}{dt} dt = \frac{F(t_0 + \tau) - F(t_0)}{\tau} \rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty. \quad (7.5)$$

В) Если потенциальная энергия  $U$  является однородной функцией координат и удовлетворяет соотношению (3), то, согласно теореме Эйлера об однородных функциях,

$$\sum_{a=1}^N \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} \mathbf{r}_a = n U. \quad (7.6)$$

Чтобы доказать это утверждение, достаточно продифференцировать равенство (3) по  $\lambda$ , а затем положить  $\lambda = 1$ .

Рассмотрим теперь кинетическую энергию системы частиц

$$T = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{v}_a^2.$$

Перепишем её в виде

$$2T = \sum_{a=1}^N \mathbf{p}_a \mathbf{v}_a \quad (7.7)$$

и, используя уравнения движения

$$\frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a},$$

преобразуем слагаемое  $\mathbf{p}_a \mathbf{v}_a$  следующим образом:

$$\mathbf{p}_a \mathbf{v}_a = \frac{d}{dt} (\mathbf{p}_a \mathbf{r}_a) - \frac{d\mathbf{p}_a}{dt} \mathbf{r}_a = \frac{d}{dt} (\mathbf{p}_a \mathbf{r}_a) + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} \mathbf{r}_a.$$

Подставим затем это соотношение в (7). Усредняя полученное таким образом выражение, найдем

$$2\langle T \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N \mathbf{p}_a \mathbf{r}_a \right\rangle + \langle W \rangle.$$

Если теперь учесть утверждение (5), то немедленно получим формулу (2).

С другой стороны, если потенциальная энергия является однородной функцией координат, то теорема Эйлера (6) позволяет переписать (2) в виде соотношения

$$2\langle T \rangle = \langle W \rangle = n \langle U \rangle.$$

Учитывая далее, что  $\langle T \rangle + \langle U \rangle = E$ , получаем соотношения (4).

Приведем примеры применения теоремы о вириале.

Поле *изотропного осциллятора*  $U(r) = kr^2/2$  является однородной функцией с  $n = 2$ , поэтому

$$\langle T \rangle = \langle U \rangle = \frac{1}{2} E, \quad (7.8)$$

причем под усреднением в данном случае можно понимать усреднение за период колебаний.

*Кулоновское поле*  $U(r) = -\alpha/r$  является однородной функцией с  $n = -1$ , поэтому при эллиптическом движении (при  $E < 0$ )

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle = -E, \quad (7.9)$$

причем и в этом случае под усреднением можно понимать усреднение за период обращения.

Интересно рассмотреть применения теоремы о вириале к задаче об эволюции *протозвезды*. Простейшая модель протозвезды — одноатомный нейтральный газ большой массы, удерживаемый гравитационным притяжением. Для такой звезды справедливы соотношения (9). Кинетическая энергия частиц связана с температурой газа

$T_\Gamma$  известной формулой  $\langle T \rangle = 3NkT_\Gamma/2$ , где  $N$  — число частиц в звезде и  $k$  — постоянная Больцмана. Энергия звезды

$$E = -\langle T \rangle = -\frac{3}{2}NkT_\Gamma,$$

и потому ее теплоемкость  $C = dE/dT_\Gamma = -3Nk/2$  отрицательна. Это означает такую интересную особенность эволюции звезды: при учете излучения ее энергия убывает, а температура возрастает (см. [6, § 21]).

## Задача

**7.1.** Найти среднюю за большой период времени кинетическую энергию частицы, движущейся в поле  $U(r) = V \ln(r/a)$ .



# Глава II

## ЛАГРАНЖЕВА МЕХАНИКА

### § 8. Уравнения Лагранжа

#### 8.1. Уравнения Лагранжа для нерелятивистской частицы в потенциальном поле — ковариантная запись уравнений Ньютона

До сих пор движение материальной точки (или частицы) рассматривалось на основе уравнений Ньютона. В этой главе мы дадим другую, *лагранжеву форму* этих уравнений, обладающую целым рядом преимуществ. Данный параграф является вводным, поэтому, не стремясь сразу к полной общности записи и определений, начнём с одномерного движения. Для движения частицы массы  $m$  вдоль прямой  $x$  в потенциальном поле  $U(x, t)$  уравнение Ньютона (в некоторой инерциальной системе отсчета) имеет вид

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U(x, t)}{\partial x}. \quad (8.1)$$

Введем функцию трёх переменных  $x, \dot{x}, t$ , равную разности кинетической и потенциальной энергий:

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - U(x, t). \quad (8.2a)$$

Её называют *функцией Лагранжа* или *лагранжианом*. Уравнение (1) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}. \quad (8.3)$$

Это уравнение и называется *уравнением Лагранжа*. Оно не имеет нового, по сравнению с уравнением Ньютона (1), физического содержания. Однако такая форма уравнения движения удобна, в частности, для перехода от декартовых координат  $x$  к любым другим координатам  $q$ , т. е. к замене

$$x = x(q, t). \quad (8.4)$$

Оказывается, что если сделать такую замену в лагранжиане

$$L\left(x(q, t), \frac{dx(q, t)}{dt}, t\right) \equiv L'(q, \dot{q}, t), \quad (8.5)$$

то уравнение движения можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L'}{\partial q}, \quad (8.6a)$$

совпадающем по форме с (3). Независимость вида уравнений движения, выраженных через функцию Лагранжа, от выбора координат, и называется их *ковариантностью*. Это свойство уравнений Лагранжа легко проверить прямым вычислением (см. задачу 4.3 из [3]). Другое доказательство будет приведено в § 9.

## 8.2. Обобщённые координаты и импульсы

Прямой проверкой легко убедиться, что если для системы  $N$  материальных точек в декартовых координатах взять функцию Лагранжа в виде разности кинетической и потенциальной энергий в некоторой инерциальной системе отсчета

$$L = T - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t); \quad T = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a \dot{\mathbf{r}}_a^2 \quad (8.2b)$$

то второй закон Ньютона запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}, \quad a = 1, 2, \dots, N. \quad (8.3b)$$

Аналогично одномерному случаю функция Лагранжа (2b) заменой

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_a(q_1, \dots, q_{3N}, t)$$

может быть выражена через  $3N$  других координат  $q_i$  и их производных  $\dot{q}_i$  (называемых *обобщёнными координатами и обобщёнными скоростями*):

$$L(q_1, \dots, q_{3N}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}, t).$$

Тогда уравнения Лагранжа имеют вид (здесь и далее для упрощения записи буквы  $q$  и  $\dot{q}$  без индекса обозначают весь набор обобщённых координат и скоростей)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, 3N. \quad (8.6b)$$

При этом переходы к криволинейным координатам, к координатам в неинерциальных системах отсчета, к “коллективным” координатам групп частиц (скажем, описывающим движение их центра масс и относительное движение) и т. п., математически оказываются совершенно одинаковыми и делаются по стандартной процедуре.

Кроме обобщённой скорости  $\dot{q}_i$  вводится также *обобщённый импульс*, соответствующий координате  $q_i$  и определяемый соотношением

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (8.7)$$

Если  $q_i$  — декартова координата, например,  $q_i = x$ , то обобщённый импульс  $p_i = m\dot{x}$  совпадает с  $x$ -й компонентой обычного импульса. В общем же случае обобщённая координата не обязательно имеет размерность длины, соответственно обобщённый импульс не обязательно имеет размерность произведения массы на скорость.

Рассмотрим, например, движение частицы в центральном поле. В этом случае удобно выбрать в качестве обобщённых координат сферические координаты  $r, \theta, \varphi$ , при этом

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - U(r), \quad (8.8a)$$

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta. \quad (8.8b)$$

Легко проверить, что обобщённые импульсы  $p_r$ ,  $p_\theta$  и  $p_\varphi$  связаны с импульсом  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  и моментом импульса  $\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}]$  соотношениями

$$p_r = (\mathbf{p})_r = \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{p}^2 = p_r^2 + \frac{\mathbf{M}^2}{r^2}, \quad p_\varphi = M_z, \quad p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \mathbf{M}^2. \quad (8.9)$$

## Задача

**8.1.** Записать компоненты вектора ускорения частицы в сферической системе координат.

## § 9. Принцип наименьшего действия

### 9.1. Принцип Гамильтона. Ковариантность уравнений Лагранжа относительно замены координат

Уравнения Лагранжа имеют прямое отношение к определенной математической задаче — задаче вариационного исчисления (см. Дополнение А).

Пусть имеется некоторый класс функций  $\tilde{y}(x)$  таких<sup>4</sup>, что все они проходят через точки  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$ , т. е.  $\tilde{y}(x_1) = y_1$ ,  $\tilde{y}(x_2) = y_2$ . Среди этих функций надо найти такую функцию  $y(x)$ , при подстановке которой в интеграл

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx, \quad y' = \frac{dy}{dx},$$

где  $f(y, y', x)$  — заданная функция трех переменных, он принимает экстремальное значение.

Согласно вариационному исчислению, искомая функция  $y(x)$  находится как решение дифференциального уравнения:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (9.1)$$

Это уравнение называется *уравнением Эйлера* данной вариационной задачи. Величина

$$\frac{\delta J}{\delta y(x)} \equiv \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}$$

называется *вариационной производной* от  $J$  по  $y(x)$ , а *вариацией* (точнее, *первой вариацией*)  $J$  называется величина  $\delta J$ , определенная соотношением

$$\delta J \equiv \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta J}{\delta y(x)} \delta y(x) dx.$$

<sup>4</sup>Подразумевается, что функции  $\tilde{y}(x)$  являются достаточно гладкими.

Аналогично ставится и решается задача определения экстремума интеграла

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y_1, \dots, y_s; y'_1, \dots, y'_s; x) dx, \quad (9.2)$$

зависящего от многих неизвестных функций  $y_i(x)$ , независимых друг от друга. Необходимое условие экстремума (1) должно выполняться по отношению к каждой из этих функций:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (9.3)$$

Очевидно сходство уравнений Лагранжа (8.6a), (8.6b) с уравнениями Эйлера (1), (3). Это дает возможность сформулировать следующий принцип для задач механики — *принцип наименьшего действия (принцип Гамильтона)*. Сформулируем его сразу для произвольных криволинейных координат, хотя из обнаруженного сходства уравнений его справедливость доказана пока только в декартовых координатах. Пусть система частиц в момент времени  $t_1$  находится в точке  $A$  с координатами  $(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, \dots, q_s^{(1)})$ , а в момент времени  $t_2$  — в точке  $B$  с координатами  $(q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, \dots, q_s^{(2)})$ . Движение системы частиц между этими точками происходит по такому закону  $q_i(t)$ , чтобы интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1(t), \dots, q_s(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_s(t), t) dt \quad (9.4)$$

принял экстремальное значение, т. е. чтобы вариация  $S$  обращалась в нуль:

$$\delta S = \sum_{i=1}^s \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0. \quad (9.5)$$

Величина  $S$  называется *действием*. При этом предполагается, что вариации координат независимы и удовлетворяют условиям

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

В силу независимости вариаций координат  $\delta q_i$  из принципа Гамильтона (5) получаются уравнения (8.6b). Таким образом, уравнения Эйлера, к которым приводит эта вариационная задача, и есть уравнения Лагранжа механической системы.

Сформулированный принцип позволяет сразу обнаружить ковариантность уравнений Лагранжа относительно преобразования координат. Действительно, преобразование координат сводится к замене переменных в интеграле действия (4). Само же значение интеграла при этом не изменяется и уравнения для координат, определяющие экстремальное значение интеграла, не изменяют своего вида.

Принцип Гамильтона можно положить в основу механики вместо уравнений Ньютона. Ценность такого подхода заключается в том, в частности, что аналогичные вариационные принципы можно сформулировать и в других разделах теоретической физики — электродинамике, квантовой механике, теории элементарных частиц и т. д.

Простой пример применения подобного подхода к электромеханическим системам рассмотрен в § 18.

Тот факт, что движение частицы задается дифференциальными уравнениями (уравнениями Ньютона), означает, что по известным значениям координат и скорости частицы в некоторый момент  $t$  определяются значения координат и скорости в близкий момент  $t + \delta t$ . Такая ситуация является для нас привычной и представляется естественной. Кстати, именно таким образом можно находить закон движения частицы численно. Вариационный же принцип утверждает, что частица движется так, будто бы она испробовала все возможные законы движения и выбрала в определенном смысле предпочтительный. Такое “стремление к определенной цели” (которая ещё когда-то будет достигнута и притом не очень-то понятна) представляется не только непривычным, но и удивительным. Конечно, можно было бы думать, что совпадение уравнений движения с уравнениями Эйлера вариационной задачи — просто случайность. Так и оказалось бы, если ограничиться рамками классической механики. Однако мы увидим в дальнейшем, что вариационный принцип связан с волновыми свойствами частиц (изучаемыми в полной мере в квантовой механике).

## 9.2. Преобразование функции Лагранжа при преобразовании координат и времени

Уравнения движения сохраняют форму уравнений Лагранжа также и в том случае, если осуществляется преобразование и координат, и времени. Но в этом случае преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных и равенство (8.5), вообще говоря, не выполняется.

Рассмотрим такое преобразование  $q_i, t \rightarrow q'_i, t'$ , что

$$q_i = q_i(q'_1, \dots, q'_s, t'), \quad t = t(q'_1, \dots, q'_s, t'), \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (9.6)$$

Приведем примеры преобразования времени: в качестве  $t'$  можно вводить “местное время”  $t' = t - \lambda x$ ; в теории относительности нередко в качестве  $t'$  используют интервал  $t' = \sqrt{(ct)^2 - \mathbf{r}^2}$ , что позволяет провести вывод и получить уравнения движения в явно релятивистски ковариантном виде. С математической точки зрения, можно забыть о физическом смысле переменной  $t'$  и трактовать преобразование (6) как замену переменных в  $s + 1$ -мерном пространстве.

При такой замене интеграл действия преобразуется следующим образом:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t'_1}^{t'_2} L \frac{dt}{dt'} dt'. \quad (9.7)$$

Поэтому новую функцию Лагранжа  $L'$  естественно определить следующим соотношением:

$$L' = L \frac{dt}{dt'}, \quad (9.8a)$$

тогда действие примет вид аналогичный исходному<sup>5</sup>:

$$S = \int_{t'_1}^{t'_2} L' \left( q', \frac{dq'}{dt'}, t' \right) dt'. \quad (9.9)$$

При этом сохранится ковариантность уравнений Лагранжа относительно преобразований (6), а именно если в старых переменных уравнения Лагранжа имели вид (8.6b), то в новых переменных и для нового лагранжиана сохранится тот же вид уравнений:

$$\frac{d}{dt'} \frac{\partial L'}{\partial (dq'_i/dt')} = \frac{\partial L'}{\partial q'_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (9.10)$$

Отметим, наконец, что уравнения Лагранжа сохраняют свой вид, если умножить функцию Лагранжа на постоянный множитель. Взяв в качестве функции Лагранжа не  $L = T - U$ , а  $L' = \lambda L$  ( $T$  — кинетическая энергия,  $U$  — потенциальная,  $\lambda = \text{const}$ ), мы получим те же уравнения движения, только умноженные на  $\lambda$ , что несущественно с точки зрения интегрирования этих уравнений.

В связи с этим необходимо сделать следующее замечание. Если две системы движутся независимо друг от друга, то можно формально объединить их в одну систему, состоящую из независимых частей. При этом их функции Лагранжа достаточно сложить. Но нередко в дальнейшем возникает необходимость учесть взаимодействие. Например, движение двух планет под действием притяжения Солнца задается лагранжианами

$$L_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \frac{GMm_i}{r_i}, \quad i = 1, 2,$$

или, если угодно, единым лагранжианом  $L = L_1 + L_2$  (здесь  $M$  — масса Солнца,  $m_{1,2}$  — массы планет,  $\mathbf{r}_{1,2}$  — их радиусы-векторы,  $\mathbf{v}_{1,2} = \dot{\mathbf{r}}_{1,2}$  — их скорости,  $G$  — постоянная в законе всемирного тяготения Ньютона). Взаимодействие планет друг с другом учтем, если добавим к  $L$  лагранжиан взаимодействия:  $L_{\text{вз}} = -Gm_1m_2/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ . Очевидно, при заменах вида  $L \rightarrow L' = \lambda L$  необходимо, чтобы множитель  $\lambda$  был одинаковым для всех слагаемых.

## § 10. Функция Лагранжа для частицы в электромагнитном поле.

### Неоднозначность выбора функции Лагранжа

Пусть частица с зарядом  $e$  находится в электромагнитном поле, заданном скалярным  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  и векторным  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  потенциалами. Электрическое и магнитное поля  $\mathbf{E}$  и

<sup>5</sup>В более подробной записи соотношение (9.8a) гласит (ср. (8.5)):

$$L' \left( q', \frac{dq'}{dt'}, t' \right) = L \left( q(q', t'), \frac{dq}{dt}, t(q', t') \right) \cdot \frac{dt}{dt'}, \quad (9.8b)$$

где

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dq_i}{dt'} \frac{dt}{dt'}, \quad \frac{dq_i(q', t')}{dt'} = \frac{\partial q_i}{\partial t'} + \sum_k \frac{\partial q_i}{\partial q'_k} \frac{dq'_k}{dt'}, \quad \frac{dt(q', t')}{dt'} = \frac{\partial t}{\partial t'} + \sum_k \frac{\partial t}{\partial q'_k} \frac{dq'_k}{dt'}.$$

$\mathbf{B}$  связаны с потенциалами соотношениями

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}, \mathbf{A} \right], \quad (10.1)$$

где  $c$  — скорость света. Нетрудно показать, что уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \quad (10.2)$$

совпадают с известными уравнениями движения

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{B}], \quad (10.3)$$

если выбрать функцию Лагранжа в виде

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e\varphi + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}. \quad (10.4)$$

Для этого достаточно проверить, что  $x$ -компоненты уравнений (2) и (3) совпадают. Предоставим это читателю.

В функции Лагранжа слагаемые  $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$  и  $e\varphi$  — это обычные кинетическая и потенциальная энергии частицы, а последнее слагаемое  $(e/c)\mathbf{A}\mathbf{v}$ , линейное по скорости, не является ни кинетической, ни потенциальной энергией. Обобщённый импульс

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A}. \quad (10.5)$$

Известно, что поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , а следовательно, и уравнения движения частиц в электромагнитном поле не изменяются при градиентном преобразовании потенциалов, т. е. при замене

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \\ \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (10.6)$$

где  $f$  — произвольная функция координат и времени. В лагранжевом же формализме это приводит к тому, что потенциалам  $\varphi'$ ,  $\mathbf{A}'$  и  $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$  соответствуют лагранжианы  $L$  и  $L'$ , отличающиеся на полную производную по времени от функции  $ef/c$ :

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e\varphi' + \frac{e}{c}\mathbf{A}'\mathbf{v} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e\varphi + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{v}\right) = \\ &= L + \frac{e}{c}\frac{df(\mathbf{r}, t)}{dt}, \end{aligned}$$

и эти лагранжианы должны быть физически эквивалентные.

Из этого примера видно, что выбор функции Лагранжа неоднозначен. Справедливо следующее общее утверждение: если к функции Лагранжа добавить полную производную по времени от любой функции координат и времени  $F(q, t)$ , то полученное выражение можно также рассматривать как некоторую функцию Лагранжа, приводящую к тем же уравнениям движения. Действительно, если

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF(q, t)}{dt}, \quad (10.7)$$

то значения действий  $S$  и  $S'$  отличаются лишь величинами, не зависящими от выбора пробной функции,

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L' dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = S + F(q^{(2)}, t_2) - F(q^{(1)}, t_1),$$

а потому совпадают и уравнения движения. Из неоднозначности функций Лагранжа следует неоднозначность обобщённых импульсов:

$$p'_i = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{dF}{dt} = p_i + \frac{\partial F}{\partial q_i}. \quad (10.8)$$

Обсуждение некоторых вопросов, связанных с такой неоднозначностью, можно найти в [3, задачи 4.7–4.9].

## § 11. Функция Лагранжа в релятивистском случае

Обобщение формул предыдущего параграфа на релятивистский случай достигается заменой нерелятивистского лагранжиана (10.4) на релятивистский:

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} - e\varphi + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v}. \quad (11.1)$$

Уравнения Лагранжа (10.2) с таким лагранжианом совпадают с релятивистскими уравнениями движения

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad (11.2)$$

Обобщённый импульс равен

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (11.3)$$

В нерелятивистском пределе (при  $v \ll c$ ) из (1) получаем

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - e\varphi + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v}, \quad (11.4)$$

что с точностью до константы  $-mc^2$  совпадает с (10.4).

Лагранжиану (1) соответствует действие  $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ , которое легко переписать в явно релятивистски инвариантном виде. Действительно,

$$c\sqrt{1 - (\mathbf{v}^2/c^2)} dt = \sqrt{(cdt)^2 - (d\mathbf{r})^2} = ds, \quad (11.5)$$

где  $s$  — интервал, а слагаемое

$$(c\varphi - \mathbf{A} \mathbf{v}) dt = A_0 dx^0 - \mathbf{A} d\mathbf{r} = A_\mu dx^\mu \quad (11.6)$$



представляет собой скалярное произведение двух 4-векторов: 4-потенциала с контравариантными  $A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$  или ковариантными  $A_\mu = (\varphi, -\mathbf{A})$  компонентами и  $dx^\mu = (cdt, d\mathbf{r})$ . Таким образом, действие есть лоренц-инвариантная величина

$$S = \int_A^B \left( -mcds - \frac{e}{c} A_\mu dx^\mu \right) \quad (11.7)$$

(здесь начало и конец интегрирования соответствуют мировым точкам  $A(ct_1, \mathbf{r}_1)$  и  $B(ct_2, \mathbf{r}_2)$ ). Если переход  $(t, \mathbf{r}) \rightarrow (t', \mathbf{r}')$  есть лоренцево преобразование, то из инвариантности действия следует, что  $L'dt' = Ldt$ . При этом  $L'(\mathbf{r}', d\mathbf{r}'/dt', t')$  как функция новых переменных имеет точно такой же вид (1), как и  $L(\mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt, t)$  как функция старых переменных.

## § 12. Функция Лагранжа для систем с идеальными голономными связями

Все рассматриваемые в классической механике объекты (например, материальная точка, твердое тело и т. п.) представляют собой результат идеализации, идеализированным является и их взаимодействия. Нередко такие идеализированные взаимодействия можно описать как связи, ограничивающие движение материальных точек и уменьшающие число степеней свободы.

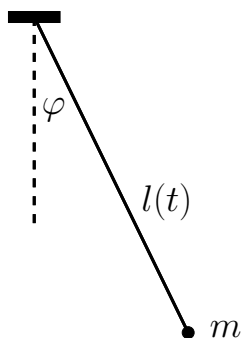


Рис. 15. Маятник на стержне переменной длины

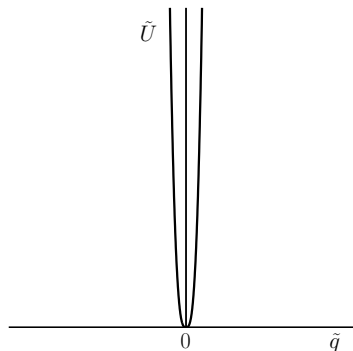


Рис. 16. Потенциальная энергия деформации стержня в зависимости от его удлинения

Для обширного класса систем с идеальными голономными связями, определение которых будет дано ниже, лагранжев подход оказывается весьма эффективен. Начнем с примера математического маятника переменной длины: грузик массы  $m$  подвешен в поле тяжести на нерастяжимом невесомом стержне, длина которого изменяется по заданному закону  $l(t)$  (рис. 15). Мы рассмотрим лишь движение грузика в вертикальной плоскости  $xy$  (ось  $x$  направлена по силе тяжести, ось  $y$  — горизонтальна, начало системы координат в точке подвеса). Радиус-вектор грузика  $\mathbf{r}$  удобно задать в полярных координатах  $r$  и  $\varphi$ . Условие нерастяжимости стержня означает, что

$$r = l(t). \quad (12.1)$$

На грузик действуют две силы: сила тяжести  $m\mathbf{g}$  и сила натяжения стержня (или сила реакции связи)  $\mathbf{R}$ , направленная вдоль  $\mathbf{r}$ . Заметим, что наша система фактически является одномерной: с учетом условия (1) для ее описания достаточно знать  $\varphi(t)$ . Проще всего найти уравнения движения для координаты  $\varphi$ , используя известные свойства уравнений Лагранжа: возможность записывать эти уравнения в любых обобщенных координатах.

Чтобы сделать это, удобно временно “расшифровать” смысл идеализации “нерастяжимый стержень”. Разумеется, в действительности стержень является просто чрезвычайно жестким, настолько жестким, что величина его деформации мала по сравнению со всеми другими рассматриваемыми в задаче длинами. Эта деформация приводит к появлению вполне существенной в задаче силы реакции связи, но во всех других отношениях ею можно пренебречь. Временно откажемся от такой идеализации и введем потенциальную энергию  $\tilde{U}(\tilde{q})$ , где

$$\tilde{q} = r - l(t)$$

— увеличение длины стержня, связанное с его силовой деформацией, а функция  $\tilde{U}(\tilde{q})$  очень быстро возрастает с ростом  $|\tilde{q}|$  (рис. 16). Теперь можно записать уравнения движения как уравнения Лагранжа в полярных координатах  $\varphi$  и  $r$ . Несколько выразительнее дальнейшее будет выглядеть, если мы вместо переменной  $r$  выберем переменную  $\tilde{q}$ .

Функция Лагранжа в этих переменных

$$\tilde{L}(\varphi, \tilde{q}, \dot{\varphi}, \dot{\tilde{q}}, t) = \frac{m}{2} \left\{ \left[ \dot{l}(t) + \dot{\tilde{q}} \right]^2 + [l(t) + \tilde{q}]^2 \dot{\varphi}^2 \right\} + mg [l(t) + \tilde{q}] \cos \varphi - \tilde{U}(\tilde{q}) \quad (12.2)$$

приводит к уравнениям

$$m \frac{d}{dt} [(l(t) + \tilde{q})^2 \dot{\varphi}] = -mg [l(t) + \tilde{q}] \sin \varphi, \quad (12.3)$$

$$m \left[ \ddot{l}(t) + \ddot{\tilde{q}} \right] = m [l(t) + \tilde{q}] \dot{\varphi}^2 + mg \cos \varphi - \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{q}}. \quad (12.4)$$

Учитывая малость величины  $\tilde{q}$ , можно в уравнении (3) положить  $\tilde{q} = 0$  и  $\dot{\tilde{q}} = 0$ . Получается уравнение

$$m \frac{d}{dt} [l^2(t) \dot{\varphi}] = -mgl(t) \sin \varphi, \quad (12.5)$$

из которого (при заданной зависимости  $l(t)$ ) может быть найдена зависимость  $\varphi(t)$ .

Уравнение (4) формально определяет  $\tilde{q}(t)$ . Однако мы не будем его использовать, вспомнив, что для “нерастяжимого стержня”  $\tilde{q}(t) = 0$ , если угодно, по определению “нерастяжимого стержня”.

Наконец, сделаем последний шаг: положим  $\tilde{q} = 0$  и  $\dot{\tilde{q}} = 0$  уже в функции Лагранжа (2) и отбросим слагаемое  $\tilde{U}$ , не нужное при записи уравнения (3) для  $\varphi$ . Легко видеть, что такая подстановка не может привести к изменению уравнения (5).

В итоге получим простую функцию Лагранжа для одномерной задачи:

$$L(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \frac{m}{2} \left[ \dot{l}^2(t) + l^2(t) \dot{\varphi}^2 \right] + mgl(t) \cos \varphi \quad (12.6)$$

В этом выражении еще дополнительно можно опустить слагаемое  $m\dot{l}^2(t)/2$ .

Итак, рецепт получения лагранжиана для системы со связью найден: следует ввести обобщенные координаты с учетом условий связи, лагранжиан — разность кинетической и потенциальной энергий — следует записывать сразу же с учетом этих условий, а добавочных слагаемых вида  $\tilde{U}$  (характеризующих чрезвычайную жесткость связей) не вводить. Такой способ действий позволяет находить уравнения движения маятника, не интересуясь силами реакции связи.

Альтернативный подход к этой задаче связан с так называемым принципом виртуальных перемещений Даламбера. В нашей задаче сила реакции связи  $\mathbf{R}$  обладает тем свойством, что работа этой силы при любом малом смещении маятника  $\delta\mathbf{r}$ , не нарушающем условие (1), равна нулю<sup>6</sup>. Действительно, смещение  $\delta\mathbf{r}$  направлено по касательной к окружности  $r = l(t) = \text{const}$ , а сила реакции связи  $\mathbf{R}$  направлена вдоль  $\mathbf{r}$ , поэтому

$$\mathbf{R} \delta\mathbf{r} = 0. \quad (12.7)$$

В ньютоновой механике движение груза определяется уравнением

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}, \quad (12.8)$$

которое совместно с условием (1) позволяет найти как закон движения  $\mathbf{r}(t)$ , так и силу  $\mathbf{R}(t)$ . Найти же уравнения движения для координаты  $\varphi$  можно, подставив  $\mathbf{R}$  из уравнения (8) в уравнение (7),

$$(m\ddot{\mathbf{r}} - m\mathbf{g}) \delta\mathbf{r} = 0, \quad (12.9)$$

и учтя условие связи (1). Предоставляем читателю проверить, что полученное таким образом уравнение движения для координаты  $\varphi$  совпадает с уравнением (5).

Перейдем к общему случаю. Мы будем представлять себе далее, что тела, движение которых мы исследуем, состоят из “материальных точек”, взаимодействующих друг с другом. Например, под абсолютно твердым телом мы понимаем совокупность материальных точек, расстояния между которыми остаются постоянными. Подобным же образом движение системы  $N$  материальных точек может быть ограничено воздействием каких-либо стержней, поверхностей и т. п. Если все эти ограничения выражаются условиями

$$F_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad (12.10)$$

то говорят, что на систему наложены  $n$  голономных связей. Словом “голономные” отмечается, что в (10) не входят скорости. При этом подразумевается, что условия (10) выполняются за счет того, что на материальные точки помимо прочих действуют силы реакции связей. Связи называются *идеальными*, если при любых смещениях точек, не нарушающем условия (10), суммарная работа всех сил реакции равна нулю. Напомним, что речь идет не о смещениях в процессе движения, а о смещениях, не нарушающих условия (1), рассматриваемые при фиксированном значении времени.

Пример с маятником показывает, что для системы с идеальными голономными связями можно сразу же выбрать обобщенные координаты с учетом связей и только через них выразить функцию Лагранжа. При этом можно решать задачу о движении системы, исключив вопрос о силах реакции связей. Выгоду такого подхода при решении сложных задач трудно переоценить. Более подробно голономные и неголономные связи рассмотрены в Дополнении В.

<sup>6</sup>Подразумевается не смещение при истинном движении маятника, а смещение, не нарушающее условие (1) при фиксированном значении  $t$ , т. е. при  $l(t) = \text{const}$ .

## Задачи

**12.1.** Найти функцию Лагранжа, обобщенные импульсы и энергию для системы, изображенной на рис. 17. Брусок массы  $M$  может двигаться без трения только вдоль горизонтальной прямой, грузик массы  $m$  может колебаться в вертикальной плоскости на стержне длины  $l$ . В качестве обобщенных координат выбрать декартову

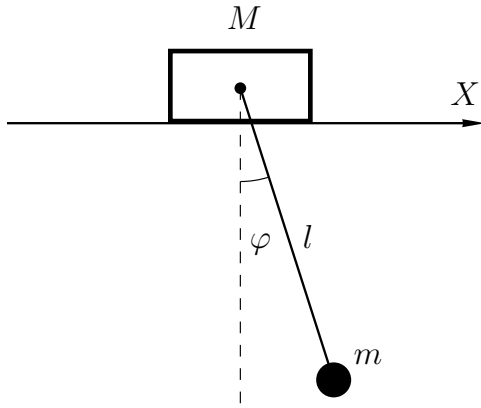


Рис. 17. К задаче 12.1

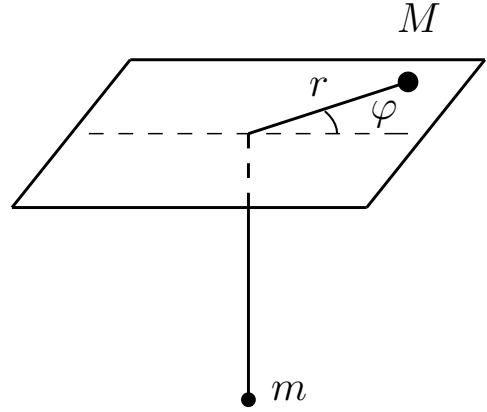


Рис. 18. К задаче 12.2

координату  $X$  для бруска и угол  $\varphi$  отклонения стержня от вертикали.

**12.2.** Две частицы массы  $M$  и  $m$  связаны нитью длины  $l$ , причем частица массы  $M$  движется по гладкой горизонтальной плоскости, а частица массы  $m$  колеблется по вертикали в поле тяжести (рис. 18). Найти функцию Лагранжа системы. Рассмотреть случай, когда частица массы  $M$  движется по траектории, близкой к окружности

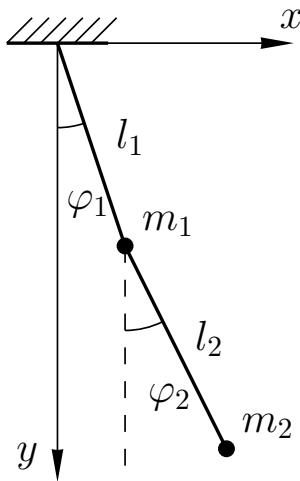


Рис. 19. К задаче 12.3

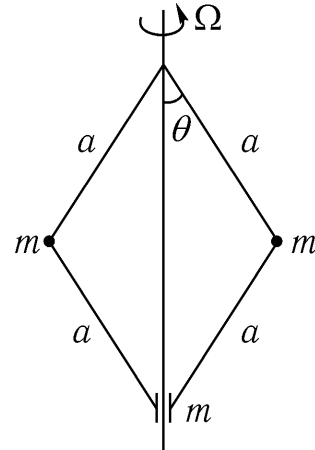


Рис. 20. К задаче 12.4

(т. е. испытывая малые колебания по радиусу). Найти отношение частоты малых радиальных колебаний к угловой скорости движения по окружности  $\omega_r/\dot{\varphi}$  и изобразить траекторию при условии  $M = 3m$ .

**12.3.** Найти функцию Лагранжа, обобщенные импульсы и энергию для системы, изображенной на рис. 19 (двойной плоский маятник).

**12.4.** То же для системы, изображенной на рис. 20. Система вращается в поле тяжести вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\Omega$ .

## § 13. Циклические координаты. Энергия в лагранжевом подходе

Функции обобщенных координат и скоростей, остающиеся постоянными при движении механической системы, называются *интегралами движения*. Наличие интегралов движения, как правило, существенно облегчает интегрирование уравнений движения. Так, наличие интегралов движения — энергии в одномерном случае, энергии и момента импульса при движении частицы в центральном поле — позволяет свести данные задачи к квадратурам.

Связь интегралов движения с симметрией задачи будет рассмотрена в следующем параграфе. Здесь же мы разберем два простых частных примера. Если функция Лагранжа не зависит от какой-либо обобщенной координаты или явным образом не зависит от времени, то сразу можно указать простые интегралы движения.

Пусть функция Лагранжа не зависит от обобщенной координаты  $q_k$  (такую координату называют *циклической*):

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \quad (13.1)$$

Тогда обобщенный импульс  $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$ , соответствующий циклической координате, является интегралом движения, что сразу же следует из уравнения Лагранжа

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (13.2)$$

и равенства (1).

Например, при движении в центральном поле функция Лагранжа (8.8) не зависит от  $\varphi$  и потому  $p_\varphi = mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta = \text{const}$ .

Еще один интеграл движения можно найти, если функция Лагранжа не зависит явно от времени. Для этого вычислим полную производную от функции Лагранжа по времени

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

и перепишем ее, с учетом (2), в виде

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left( \frac{dp_i}{dt} \dot{q}_i + p_i \frac{d\dot{q}_i}{dt} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i p_i \dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (13.3)$$

Введем величину

$$E(t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L, \quad (13.4a)$$

называемую *энергией* (при этом подразумевается, что в правой стороне (4a) стоят величины  $q_i(t)$  и  $\dot{q}_i(t)$ , соответствующие движению системы, т. е.  $E$  есть функция времени). В итоге (3) можно переписать в виде

$$\frac{dE(t)}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (13.5)$$

Если функция Лагранжа не зависит явно от времени

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

то  $E(t) = \text{const.}$

В нерелятивистском случае функция Лагранжа обычно содержит члены квадратичные  $L_2$ , линейные  $L_1$  и не зависящие  $L_0$  от обобщенных скоростей:

$$L = L_2 + L_1 + L_0,$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \sum_{ik} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k; \quad L_1 = \sum_i b_i(q) \dot{q}_i; \quad L_0 = L_0(q, t). \quad (13.6)$$

Легко убедиться прямым вычислением, что для такой функции Лагранжа энергия равна

$$E = L_2 - L_0, \quad (13.7)$$

т. е. из лагранжиана квадратичные по скоростям слагаемые переходят в энергию без изменения, не зависящие от скоростей слагаемые изменяют знак, а линейные по скоростям — выпадают.

Энергия, определенная формальным соотношением (4a), не всегда совпадает с суммой  $T + U$ , вычисленных в инерциальной системе отсчёта.

**Пример 1.** Лагранжиан частицы в электромагнитном поле (10.4) содержит слагаемые  $L_2 = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$ ,  $L_1 = \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v}$  и  $L_0 = -e\varphi$ , поэтому энергия

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + e\varphi, \quad (13.8)$$

т. е. равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

**Пример 2.** Рассмотрим математический маятник, который колеблется в плоскости, вращающейся вокруг вертикальной оси с заданной постоянной угловой скоростью  $\omega$  (обозначения на рис. 21). Пусть  $T$  — кинетическая энергия в инерциальной системе отсчёта. В этом примере величина  $T + U$  не сохраняется.

С другой стороны функция Лагранжа, равная  $L = T - U$ , после перехода к обобщенной координате  $\varphi$  (угол отклонения маятника от вертикали во вращающейся плоскости) оказывается равной

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\varphi}^2 + \omega^2 \sin^2 \varphi) + mgl \cos \varphi$$

и не зависит явно от времени. Поэтому сохраняется энергия, равная согласно (7)

$$E = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\varphi}^2 - \omega^2 \sin^2 \varphi) - mgl \cos \varphi.$$

Отметим, что слагаемое  $\frac{1}{2} m l^2 \omega^2 \sin^2 \varphi$ , отвечающее кинетической энергии, связанной с вращением, вошло в выражение энергии со знаком “минус”, т. е. наша энергия не

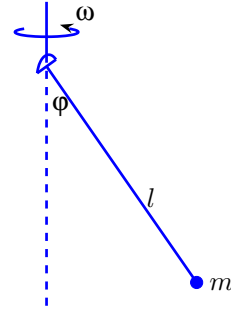


Рис. 21. Маятник, который колеблется во вращающейся плоскости

равна сумме кинетической и потенциальной энергий  $T + U$  в инерциальной системе отсчёта. Мы увидим далее (см. § 17.2), что  $E$  — это энергия во вращающейся системе координат.

Рассмотрим еще вопрос о неоднозначности энергии, связанный с неоднозначностью выбора функции Лагранжа. Пусть функции Лагранжа  $L$  и  $L'$ , различающиеся на полную производную по времени от произвольной функции  $F(q, t)$ :

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF(q, t)}{dt}.$$

Мы отмечали в § 10, что соответствующие уравнения движения совпадают. Однако лагранжевы энергии  $E$ , определяемая формулой (4a), и

$$E'(t) = \sum_i \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L', \quad (13.4b)$$

оказываются, вообще говоря, различными:

$$E'(t) = E(t) - \frac{\partial F(q, t)}{\partial t}.$$

В частности, если энергия  $E$  сохраняется, то  $E'$  может оказаться зависящей от времени.

Дополнительные обсуждения затронутых здесь вопросов можно найти в § 17, 18 и в [3, задачи 4.13а, 4.15, 4.16].

## § 14. Симметрия и интегралы движения. Теорема Нётер

Утверждения предыдущего параграфа представляют собой частное проявление общего свойства механических (и не только механических!) систем — *наличие интеграла движения является следствием определенной симметрии системы*. Поясним это на двух ранее рассмотренных примерах.

### 14.1. Примеры

В качестве первого примера рассмотрим движение частицы в центральном поле  $U(r)$ . В этом случае сохраняется момент импульса частицы  $\mathbf{M}$ . Наличие этого интеграла движения является следствием сферической симметрии рассматриваемой системы. В самом деле, в центральном поле функция Лагранжа (8.8a) не изменяется при повороте вокруг оси  $z$ , т. е. при преобразовании  $\varphi \rightarrow \varphi + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — произвольный угол поворота. Следствием этого является сохранение обобщенного импульса  $p_\varphi = M_z$ . Далее, в центральном поле направление оси  $z$  можно выбирать произвольно, что и приводит к сохранению вектора  $\mathbf{M}$ .

В качестве второго примера рассмотрим движение частицы в постоянном потенциальном поле  $U(\mathbf{r})$ . В этом случае сохраняется энергия  $E = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + U(\mathbf{r})$ . Наличие этого интеграла движения является следствием того, что функция Лагранжа

$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r})$  не зависит от времени, т. е. не изменяется при преобразовании  $t \rightarrow t + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — произвольный сдвиг по времени.

Рассмотрим теперь несколько более сложный пример движения заряженной частицы в поле бесконечной равномерно заряженной винтовой линии с шагом  $h$ . Выберем ось  $z$  вдоль оси винтовой линии. Данная система обладает винтовой симметрией — ее функция Лагранжа не изменяется при преобразованиях

$$\varphi \rightarrow \varphi + \varepsilon, \quad z \rightarrow z + \frac{h}{2\pi} \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — произвольный угол поворота вокруг оси  $z$ . Если параметр  $\varepsilon$  мал, то из указанной симметрии следует, что

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \varepsilon + \frac{\partial L}{\partial z} \frac{h}{2\pi} \varepsilon = 0. \quad (14.1)$$

Используя уравнения Лагранжа в форме (13.2):

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{dp_\varphi}{dt}, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{dp_z}{dt},$$

получим из (1)

$$\frac{d}{dt} \left( p_\varphi + \frac{h}{2\pi} p_z \right) = 0,$$

т. е. в рассматриваемом поле существует дополнительный интеграл движения (напомним, что  $p_\varphi = M_z$ )

$$M_z + \frac{h}{2\pi} p_z = \text{const}. \quad (14.2)$$

В этом примере отдельно  $M_z$  и  $p_z$  не сохраняются, но сохраняется их комбинация (2).

## 14.2. Обобщение

Теперь уже не трудно понять, что если функция Лагранжа не изменяется в результате некоторого совместного сдвига по времени и координатам, то сохраняется какая-то определенная комбинация из энергии и обобщенных импульсов, хотя по отдельности обобщенные импульсы или энергия могут и не сохраняться. Именно, пусть бесконечно малое преобразование времени и координат имеет вид

$$t \rightarrow t + \varepsilon c_t, \quad q_i \rightarrow q_i + \varepsilon c_i, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (14.3)$$

где  $\varepsilon$  — бесконечно малый параметр, а  $c_t$  и  $c_i$  — некие постоянные величины, и пусть при этом преобразовании функция Лагранжа системы не изменяется (с точностью до слагаемых порядка  $\varepsilon$  включительно):

$$\delta L = \varepsilon \left( \frac{\partial L}{\partial t} c_t + \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_i} c_i \right) = 0. \quad (14.4)$$

Тогда величина

$$E c_t - \sum_{i=1}^s p_i c_i = \text{const}, \quad (14.5)$$



т. е. является интегралом движения. Для доказательства подставим в (4) соотношения (13.2), (13.5) и немедленно получим

$$\frac{d}{dt} \left( -Ec_t + \sum_{i=1}^s p_i c_i \right) = 0,$$

откуда следует сохранение величины (5).

### 14.3. Теорема Нётер

До сих пор мы ограничивались инвариантностью функции Лагранжа относительно преобразования (3), в которых  $c_t$  и  $c_i$  — некоторые постоянные. Оказывается, можно получить и более общее утверждение, когда в преобразовании (3) вместо постоянных  $c_t$  и  $c_i$  будут фигурировать произвольные функции координат и времени. Только в этом случае требование неизменности предъявляется не к функции Лагранжа, а к действию. Таким обобщением является следующая *теорема Эммы Нётер*.

Пусть бесконечно малое преобразование времени и координат имеет вид

$$t \rightarrow t' = t + \varepsilon h(q, t), \quad q_i \rightarrow q'_i = q_i + \varepsilon f_i(q, t), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (14.6)$$

где  $\varepsilon$  — бесконечно малый параметр, и пусть при этом преобразовании вид действия не меняется (с точностью до слагаемых порядка  $\varepsilon$  включительно)<sup>7</sup>

$$\int_{t_1}^{t_2} L \left( q, \frac{dq}{dt}, t \right) dt = \int_{t'_1}^{t'_2} L \left( q', \frac{dq'}{dt'}, t' \right) dt'. \quad (14.7)$$

Тогда величина

$$Eh - \sum_{i=1}^s p_i f_i = \text{const}, \quad (14.8)$$

т. е. является интегралом движения. Простое доказательство этой теоремы будет дано в § 39.3.

Полученным соотношениям можно придать еще и такой, иногда более удобный в приложениях, вид. Обозначим

$$\varepsilon h(q, t) = \delta t, \quad \varepsilon f_i(q, t) = \delta q_i.$$

Пусть при преобразовании

$$t \rightarrow t + \delta t, \quad q_i \rightarrow q_i + \delta q_i, \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (14.9)$$

действие не изменяет своего вида в указанном выше смысле. Тогда величина

$$E\delta t - \sum_{i=1}^s p_i \delta q_i = \text{const}. \quad (14.10)$$

---

<sup>7</sup>Подчеркнём, что в левой и правой сторонах равенства (7) стоит *одна и та же функция*  $L$ , но от разных аргументов.

Теорема Нётер представляет собой, в сущности, единый вывод различных законов сохранения при наличии определенной симметрии системы. Важность ее возрастает в связи с тем, что подобная же теорема имеет место и в теории поля (см. [7, 8]).

Для иллюстрации применения теоремы Нётер рассмотрим движение частицы в поле диполя. В этом случае функция Лагранжа равна

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - U(\mathbf{r}), \quad U(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{a}\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{a} = \text{const}. \quad (14.11)$$

Эта функция Лагранжа явным образом не зависит от времени и не изменяется при повороте вокруг вектора  $\mathbf{a}$ , поэтому при движении в этом поле сохраняются энергия  $E = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + U(\mathbf{r})$  и проекция момента импульса на направление диполя  $m[\mathbf{r}, \mathbf{v}]\mathbf{a}$ . Однако эта система обладает еще и дополнительной симметрией.

Легко убедиться, что для лагранжиана (11) соотношение (7) выполняется при *преобразовании подобия*

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \lambda\mathbf{r}, \quad t \rightarrow t' = \lambda^2 t, \quad (14.12)$$

где  $\lambda$  — произвольное число, так как

$$L\left(\mathbf{r}', \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}\right) = L\left(\lambda\mathbf{r}, \frac{\mathbf{v}}{\lambda}\right) = L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \frac{1}{\lambda^2} = L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \frac{dt}{dt'}.$$

Теорема Нётер позволяет найти еще один интеграл движения, связанный с симметрией относительно преобразования подобия. В качестве  $\lambda$  возьмем  $\lambda = 1 + \varepsilon$ , тогда

$$\delta\mathbf{r} = \varepsilon\mathbf{r}, \quad \delta t = 2\varepsilon t$$

и из (10) следует

$$2Et - m\mathbf{v}\mathbf{r} = \text{const}. \quad (14.13)$$

Используя этот интеграл движения, легко найти зависимость  $r(t)$ :

$$r^2(t) = \frac{2E}{m}(t - \tau)^2 + B,$$

где  $\tau$  и  $B$  — постоянные, определяемые начальными условиями.

При получении интеграла движения (13) существенным был не конкретный вид потенциальной энергии (11), а лишь тот факт, что  $U(\lambda\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})/\lambda^2$ . Поэтому тот же самый интеграл движения (13) имеет место и для частицы в центральном поле  $U(r) = \beta/r^2$ , и при движении в поле магнитного монополя (см. [3, задача 4.20]) и т. д.

Надо сознаться, что приведенная здесь формулировка теоремы Нётер представляет собой вариант, адаптированный для задач классической механики. Оригинальная теорема Нётер относится к непрерывным системам. Следует также упомянуть, что механические системы, обладающие той или иной симметрией, скорее представляют собой исключение, чем правило. В этом смысле установление факта симметрии является нередко достаточно сложной и творческой задачей. Напротив, отыскание интегралов движения с помощью теоремы Нётер после установления симметрии системы является простой стандартной процедурой. Ряд таких физически интересных примеров рассмотрен в [1, § 48].

В заключение напомним, что при добавлении к функции Лагранжа полной производной от функции координат и времени уравнения Лагранжа не изменяются.

В связи с этим справедлива несколько более общая теорема: если при преобразованиях (6) вид функции Лагранжа изменяется не более, чем на полную производную от функции координат и времени

$$\int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) dt = \int_{t'_1}^{t'_2} \left[ L\left(q', \frac{dq'}{dt'}, t'\right) + \varepsilon \frac{dF(q', t')}{dt'} \right] dt', \quad (15.7a)$$

то интегралом движения является величина

$$Eh - \sum_{i=1}^s p_i f_i - F = \text{const}. \quad (15.8a)$$

## Задачи

**14.1.** Найти интегралы движения для частицы, движущейся в поле бегущей волны  $U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)$ , где  $\mathbf{V}$  — постоянный вектор.

**14.2.** Найти интегралы движения для частицы в однородном постоянном магнитном поле  $\mathbf{B}$ , если векторный потенциал задан в виде:

а)  $A_x = A_z = 0, A_y = xB,$

б)  $\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{B}, \mathbf{r}].$

## § 15. Фундаментальные законы сохранения для замкнутой системы частиц

Теорема Нётер дает возможность получать интегралы движения, если инвариантность функции Лагранжа (в более общем случае — действия) относительно какого-либо семейства преобразований уже найдена, но в ней ничего не говорится о том, как такого рода инвариантность можно находить. В ряде случаев такая инвариантность оказывается связанной с очень общими предположениями о свойствах реального мира.

Из курса общей физики известны законы сохранения полного импульса, момента импульса и энергии замкнутой системы частиц. Их доказательство основано на втором и третьем законах Ньютона и предположении, что силы парного взаимодействия между частицами зависят лишь от разности их радиус-векторов.

В лагранжевом подходе теорема Нётер дает возможность установить фундаментальную связь этих законов сохранения с основными свойствами пространства и времени, такими как однородность и изотропия пространства и однородность времени.

Предположение об *однородности пространства* означает, что движение замкнутой системы  $N$  частиц из данных начальных условий не зависит от того, в каком месте пространства находится данная система. Отсюда следует, что функция Лагранжа системы  $L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t)$  не изменяется при переносе всех частиц системы на одну и ту же величину  $\varepsilon$ , т. е. при преобразовании

$$\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}_a + \varepsilon, \quad t \rightarrow t. \quad (15.1)$$

При этом

$$\delta \mathbf{r}_a = \varepsilon, \quad \delta t = 0,$$

и из (14.10) следует

$$\left( \sum_a \mathbf{p}_a \right) \boldsymbol{\varepsilon} = \text{const},$$

а из произвольности вектора  $\boldsymbol{\varepsilon}$  получаем *закон сохранения полного импульса замкнутой системы частиц*:

$$\sum_{a=1}^N \mathbf{p}_a = \text{const}. \quad (15.2)$$

Аналогично, предположение об *изотропии пространства* означает, что относительное движение замкнутой системы частиц не изменяется при любом повороте этой системы как целого в пространстве, а потому при таком повороте функция Лагранжа не изменится. Повернем систему на угол  $\varepsilon$  вокруг произвольной оси, заданной единичным вектором  $\mathbf{n}$ . При этом

$$\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}_a + \delta \mathbf{r}_a, \quad \delta \mathbf{r}_a = \varepsilon [\mathbf{n}, \mathbf{r}_a], \quad \delta t = 0, \quad (15.3)$$

и из (14.10) следует

$$\sum_a \mathbf{p}_a \delta \mathbf{r}_a = \varepsilon \sum_a \mathbf{p}_a [\mathbf{n}, \mathbf{r}_a] = \text{const},$$

или

$$\varepsilon \mathbf{n} \sum_a [\mathbf{r}_a, \mathbf{p}_a] = \text{const}.$$

Отсюда в силу произвольности направления  $\mathbf{n}$  получаем *закон сохранения полного момента импульса замкнутой системы частиц*:

$$\mathbf{M} = \sum_{a=1}^N [\mathbf{r}_a, \mathbf{p}_a] = \text{const}. \quad (15.4)$$

Наконец, *однородность времени* предполагает, что движение замкнутой системы частиц не зависит от того, с какого момента времени начнется это движение (при условии, что начальное состояние системы каждый раз выбирается одинаковым). Отсюда следует, что функция Лагранжа системы не изменяется при преобразовании

$$\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}_a, \quad t \rightarrow t + \varepsilon. \quad (15.5)$$

При этом

$$\delta \mathbf{r}_a = 0, \quad \delta t = \varepsilon,$$

и из (14.10) следует *закон сохранения энергии замкнутой системы частиц*:

$$E = \sum_{a=1}^N \mathbf{p}_a \mathbf{v}_a - L = \sum_{i=1}^{3N} p_i \dot{q}_i - L = \text{const}. \quad (15.6)$$

Особую ценность лагранжеву подходу придает еще и то обстоятельство, что аналогичные выводы можно провести и в теории поля при описании систем с бесконечным числом степеней свободы. В теории поля вначале строятся лагранжианы, подчиненные требованиям инвариантности относительно сдвигов и поворотов и независимые от времени. Такой выбор не только позволяет вычислить энергию, импульс и момент импульса поля, но, фактически дать их определения.

Интегралы движения, отвечающие преобразованиям Галилея и Лоренца, обсуждаются в [2, § 14; 3, задача 4.14].

## § 16. Преобразования Галилея

Пусть оси системы отсчёта  $K'(x', y', z')$  параллельны осям инерциальной системы  $K(x, y, z)$  (которую мы считаем неподвижной), а начало отсчёта системы  $K'$  движется:  $\mathbf{R}_{O'} = \mathbf{R}(t)$  (рис. 22). Координаты относительно подвижной системы  $K'$  вводятся

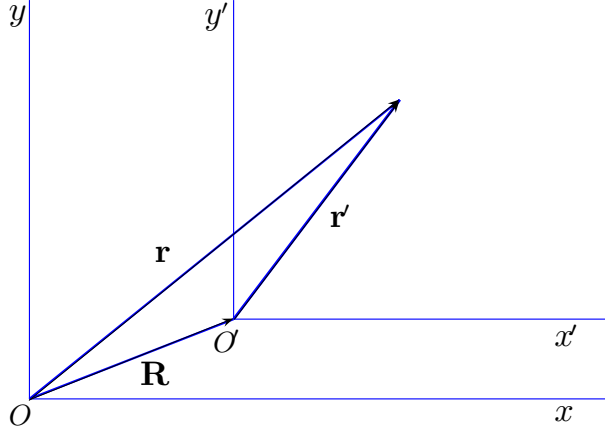


Рис. 22. Две системы отсчета — неподвижная  $K(x, y, z)$  и движущаяся поступательно  $K'(x', y', z')$

соотношением  $\mathbf{r} = \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}'$ . Для определённости выберем  $\mathbf{R}(0) = 0$ .

Если скорость  $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$  постоянна, то система  $K'$  также является инерциальной, а координаты и скорости частицы изменяются согласно преобразованиям Галилея:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t', \quad t = t', \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}. \quad (16.1)$$

Пусть функция Лагранжа частицы в системе  $K$  равна

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - U(\mathbf{r}), \quad (16.2)$$

тогда обобщенный импульс и энергия этой частицы таковы:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m \mathbf{v}, \quad E = \mathbf{p} \mathbf{v} - L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + U(\mathbf{r}). \quad (16.3)$$

При переходе к системе  $K'$  можно предложить два различных способа получения функции Лагранжа. Во-первых, можно рассматривать этот переход просто как замену переменных (1), в этом случае новая функция Лагранжа равна

$$L'_1(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) = L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}')^2 - m \mathbf{v}' \mathbf{V} + \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 - U(\mathbf{r}' + \mathbf{V}t'). \quad (16.4)$$

Для обобщенных импульсов и энергий в этих двух системах отсчёта получаем соотношения:

$$\mathbf{p}'_1 = \frac{\partial L'_1}{\partial \mathbf{v}'} = m (\mathbf{v}' + \mathbf{V}) = \mathbf{p}; \quad (16.5a)$$

$$E'_1 = \mathbf{p}'_1 \mathbf{v}' - L'_1 = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}')^2 + U - \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 = E - \mathbf{V} \mathbf{p}. \quad (16.5b)$$

Во-вторых, можно учесть, что  $K'$  — инерциальная система и выбрать функцию Лагранжа в виде разности кинетической и потенциальной энергий в системе  $K'$ :

$$L'_2(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}')^2 - U(\mathbf{r}' + \mathbf{V}t'). \quad (16.6)$$

Функция Лагранжа  $L'_2$  отличается от  $L'_1$  на полную производную по времени от функции

$$F(\mathbf{r}', t) = -m\mathbf{r}'\mathbf{V} + \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 t$$

и приводит к тем же уравнениям Лагранжа, что и функция  $L'_1(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)$  (см. § 13). Однако законы преобразования обобщенных импульсов и энергий имеют другой вид, чем в (4):

$$\mathbf{p}'_2 = \frac{\partial L'_2}{\partial \mathbf{v}'} = m\mathbf{v}' = \mathbf{p} - m\mathbf{V}, \quad (16.7a)$$

$$E'_2 = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}')^2 + U = E - \mathbf{V}\mathbf{p} + \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2. \quad (16.7b)$$

Два выражения энергии  $E'_1$  и  $E'_2$  отличаются на постоянную.

Мы уже отмечали в § 13, что энергии  $E$  и  $E'$  могут иметь различную зависимость от времени. Рассмотренный переход от одной инерциальной системы отсчёта к другой позволяет проиллюстрировать это утверждение, используя простой поучительный пример — движение шарика внутри ящика с абсолютно упругими стенками. Пусть ящик покоится в системе  $K$ , тогда скорость движения шарика изменяется при соударениях со стенками ящика только по направлению, но не по величине, и энергия  $E$  сохраняется. Но в системе  $K'$  скорость шарика при соударениях с движущейся стенкой изменяется не только по направлению, но и по величине, поэтому энергия  $E'$ , определённая или соотношением (5b) или соотношением (7b), не сохраняется.

## § 17. Неинерциальные системы отсчёта

Нередко бывает удобно использовать системы отсчёта, которые связаны с телами, движущимися с ускорением в инерциальной системе отсчёта, — *неинерциальные системы отсчёта*. Переход к координатам, отсчитываемым относительно таких тел, сводится просто к замене координат в функции Лагранжа. Неинерциальными являются, в частности, системы отсчёта, связанные с Землёй.

### 17.1. Система отсчёта, движущаяся поступательно

Если скорость  $\mathbf{V}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t)$  не является постоянной, то система  $K'$  (рис. 22) уже не является инерциальной. Функция Лагранжа в неинерциальной системе  $K'$  выбираем равной (16.2)

$$L'(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}', t) = \frac{m}{2} (\dot{\mathbf{r}}' + \mathbf{V}(t))^2 - U(\mathbf{R}(t) + \mathbf{r}'), \quad (17.1)$$

уравнения движения в системе  $K'$  таковы

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'} - m\mathbf{W}, \quad (17.2)$$

где  $\mathbf{W} = \dot{\mathbf{V}}(t)$  — ускорение системы  $K'$ . Изменение уравнений движения при переходе к системе отсчёта  $K'$  сводится к тому, что к силе, действующей на частицу, добавляется *сила инерции*<sup>8</sup>, равная  $(-m\mathbf{W})$ .

На космической станции действующая на космонавта сила инерции, обусловленная ускоренным движением станции в поле тяжести Земли, как раз компенсирует действующую на космонавта силу тяжести — возникает невесомость.

В системе отсчёта, начало которой связано с центром Земли, а оси ориентированы по звёздам, силы, с которыми действуют Солнце и Луна, скомпенсированы силами инерции для тех частиц, которые расположены в центре Земли. Для частиц, находящихся на поверхности Земли, полной компенсации нет. Нескомпенсированная часть составляет *приливные силы*.

## 17.2. Вращающаяся система отсчёта

Пусть система отсчёта  $K'(x', y', z')$  вращается с угловой скоростью  $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(t)$  относительно инерциальной системы  $K(x, y, z)$  и точка  $x' = y' = z' = 0$  совпадает с точкой  $x = y = z = 0$ . Ясно, что радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , задающий положение материальной точки в системе  $K$ , совпадает с радиус-вектором  $\mathbf{r}'$ , определяющим положение этой же точки в системе  $K'$ , хотя компоненты этих векторов  $x, y, z$  и  $x', y', z'$ , вообще говоря, не совпадают.

Если частица неподвижна в системе  $K'$ , то в системе  $K$  её скорость

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}] = [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}']$$

(ср. (15.3)). Если же и в системе  $K'$  частица движется со скоростью  $\mathbf{v}'$ , то, добавляя эту скорость к  $[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}']$ , имеем окончательно

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}', \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}' + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}']. \quad (17.3)$$

Функция Лагранжа  $L'(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)$  для частицы во вращающейся системе получается из функции Лагранжа (16.2) заменой переменных (3):

$$L'(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}')^2 + m \mathbf{v}' [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}'] + \frac{1}{2} m [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}']^2 - U(\mathbf{r}'). \quad (17.4)$$

Отсюда получаем обобщённый импульс и момент импульса:

$$\mathbf{p}' = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{v}'} = m (\mathbf{v}' + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}']), \quad \mathbf{M}' = \mathbf{r}' \times \mathbf{p}'. \quad (17.5)$$

Учитывая (3) и (5), находим связь  $\mathbf{p}'$  и  $\mathbf{M}'$  с аналогичными величинами в системе  $K$ :

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}, \quad \mathbf{M}' = \mathbf{M}. \quad (17.6)$$

Для энергии  $E'$  в системе  $K'$  имеем

$$E' = \mathbf{p}' \mathbf{v}' - L' = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}')^2 + U(\mathbf{r}') - \frac{1}{2} m [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}']^2. \quad (17.7)$$

---

<sup>8</sup>В рамках ньютоновской механики силы инерции отличаются от других сил тем, что возникают не в результате взаимодействия тел, а “сами по себе” (при переходе к неинерциальной системе отсчёта). Поэтому к ним не удастся применить третий закон Ньютона (“действие равно противодействию”). Однако это никак не сказывается на решении задачи о движении тел.

В  $E'$  помимо кинетической и потенциальной энергий содержится слагаемое

$$-\frac{1}{2} m [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}']^2,$$

называемое *центробежной энергией*. Связь  $E'$  с энергией  $E$  в системе  $K$  найдём, используя (3) и (5):

$$E = \mathbf{p}\mathbf{v} - L = \mathbf{p}'(\mathbf{v}' + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}']) - L' = E' + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{M}'. \quad (17.8)$$

Уравнения движения во вращающейся системе — это уравнения Лагранжа для новых координат

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{v}'} = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{r}'}$$

Эти уравнения после простой перегруппировки имеют вид

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'} + 2m[\mathbf{v}', \boldsymbol{\Omega}] + m[\mathbf{r}', \dot{\boldsymbol{\Omega}}] + m[\boldsymbol{\Omega}, [\mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}]]. \quad (17.9)$$

Помимо обычной потенциальной силы  $-\partial U/\partial \mathbf{r}'$  в правой стороне этого уравнения содержатся слагаемые — силы инерции, обязанные своим происхождением неинерциальности системы отсчёта. Это *кориолисова сила*

$$2m[\mathbf{v}', \boldsymbol{\Omega}],$$

*центробежная сила инерции*

$$m[\boldsymbol{\Omega}, [\mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}]]$$

*и сила инерции*

$$m[\mathbf{r}', \dot{\boldsymbol{\Omega}}],$$

*обусловленная неравномерностью вращения.*

В системе отсчёта, связанной с Землёй, силы инерции проявляются в крупном масштабе в отклонении направления ветра (в северном полушарии вправо, в южном — влево), морских течений, течения больших рек.

Обратим внимание на задачи 9.22 и 9.25 из [3], в которых переход к вращающейся системе отсчёта оказывается естественным.

### 17.3. Теорема Лармора

Переход ко вращающейся системе отсчёта оказывается весьма эффективен в следующей задаче. Рассмотрим финитное движение заряженной частицы в потенциальном поле  $U(r)$ . Пусть дополнительно имеется однородное постоянное магнитное поле  $\mathbf{B}$ . Как будет выглядеть движение частицы в этом случае? Если магнитное поле мало, нетрудно получить достаточно общий результат, известный под названием *теоремы Лармора*.

Запишем функцию Лагранжа рассматриваемой задачи  $L$  в инерциальной системе отсчёта  $K$ :

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - U(r) + \frac{e}{c} \mathbf{v} \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (17.10)$$



где  $e$  — заряд частицы, а  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  — векторный потенциал, который может быть выбран в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [\mathbf{B}, \mathbf{r}]. \quad (17.11)$$

Рассмотрим теперь это же движение в системе отсчёта  $K'$ , которая вращается с постоянной угловой скоростью  $\boldsymbol{\Omega}$  по отношению к системе  $K$ . Соотношение между радиус-векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  и скоростями  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$  в системах отсчета  $K$  и  $K'$  дается формулами (3). Подставив эти выражения в (10), мы получим лагранжиан нашей задачи  $L'$  в системе отсчёта  $K'$ :

$$L' = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}' + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}'])^2 - U(r') + \frac{e}{2c} (\mathbf{v}' + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}']) \cdot [\mathbf{B}, \mathbf{r}'].$$

Его можно представить в виде

$$L' = L'_0 + \delta L', \quad L'_0 = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}')^2 - U(r'), \quad (17.12)$$

$$\delta L' = m \mathbf{v}' [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}'] + \frac{e}{2c} \mathbf{v}' [\mathbf{B}, \mathbf{r}'] + \frac{1}{2} m [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}']^2 + \frac{e}{2c} [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}'] \cdot [\mathbf{B}, \mathbf{r}'].$$

Если выбрать для  $\boldsymbol{\Omega}$  значение (называемое *ларморовской частотой*)

$$\boldsymbol{\Omega}_L = -\frac{e\mathbf{B}}{2mc}, \quad (17.13)$$

то величины первого порядка по полю  $B$  точно сократятся и  $\delta L'$  окажется величиной второго порядка:

$$\delta L' = -\frac{e^2}{8mc^2} [\mathbf{B}, \mathbf{r}']^2. \quad (17.14)$$

Отсюда видно, что если магнитное поле является достаточно малым, то слагаемое  $\delta L'$  мало (при финитном движении частицы!) и им можно пренебречь. Таким образом, движение частицы в системе отсчёта  $K'$  определяется только потенциальным полем  $U(r')$ .

В качестве примера рассмотрим движение заряженной частицы в кулоновском поле  $U(r) = -\alpha/r$  и малом однородном и постоянном магнитном поле  $\mathbf{B}$  при энергии  $E < 0$ . При переходе к системе отсчёта  $K'$  орбита частицы представляет собой обычный эллипс. А все влияние слабого магнитного поля в исходной системе отсчёта  $K$  сводится к прецессии этого эллипса вокруг направления поля  $\mathbf{B}$  с ларморовской частотой (13). При этом и момент импульса частицы также прецессирует вокруг направления магнитного поля.

## § 18. Эффективная функция Лагранжа для электромеханических систем

Уменьшение числа рассматриваемых координат с сохранением лагранжевой формы уравнений возможно не только за счет идеальных голономных связей. Приведем другой, менее очевидный пример.

Движение столбика жидкости в вертикальной  $U$ -образной трубке (рис. 23) можно исследовать, основываясь на функции Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{mgx^2}{l}, \quad (18.1)$$

где  $m$  — масса,  $l$  — длина столба жидкости,  $x$  — высота уровня в одном колене, отсчитанная от положения равновесия. При этом мы отвлекаемся от возможности отклонения формы поверхности жидкости от плоской, от трения и т. д.

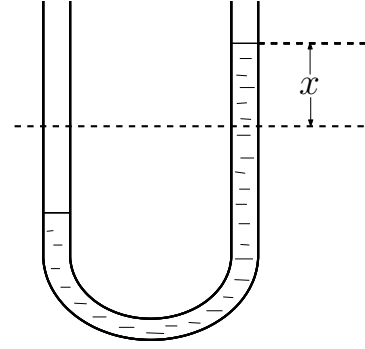


Рис. 23. Трубка с жидкостью

Еще пример. Рассмотрим малые колебания грузика массы  $M$ , подвешенного на пружинке жесткости  $k$  и массы  $m$  в поле тяжести. Если пренебречь массой пружинки, то частота малых колебаний грузика  $\omega_0 = \sqrt{k/M}$ . Считая пружинку однородной, найдем поправку к частоте колебаний, обусловленную учетом малой массы пружинки,  $m \ll M$ . Пружинка представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы. Однако в интересующем нас движении она испытывает только такие растяжения и сжатия, которые могут быть описаны заданием всего одной величины — длины пружинки. Для изучения такого движения достаточно ограничиться в функции Лагранжа одной степенью свободы. Выбрав в качестве координаты отклонение  $x$  грузика от положения равновесия, добавим к “обычной” функции Лагранжа

$$L_0 = \frac{1}{2} (M\dot{x}^2 - kx^2)$$

кинетическую энергию пружины

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^l v^2(\xi) d\xi.$$

Здесь  $\rho = m/l$  — линейная плотность пружинки,  $l(t)$  — ее длина,  $v(\xi) = \dot{x}\xi/l$  — скорость точки пружинки, находящейся в данный момент на расстоянии  $\xi$  от точки подвеса, так что  $T = m\dot{x}^2/6$ . Таким образом, в функции Лагранжа к массе грузика добавляется треть массы пружинки, и частота колебаний оказывается равной

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M + (m/3)}} \approx \sqrt{\frac{k}{M}} \left(1 - \frac{m}{6M}\right). \quad (18.2)$$

В этих простых примерах мы не доказывали, что движения описываются небольшим числом координат, а принимали это “из физических соображений”. В сущности, так же поступаем мы и в более сложных случаях, принимая, например, что связи являются идеальными. Здесь будет, пожалуй, уместно напомнить, что все рассматриваемые в классической механике объекты (например, материальная точка, твердое тело, идеальные связи и т. п.) представляют собой результат идеализации, а результаты расчетов являются приближенными.

Рассмотрим теперь электрическую цепь, состоящую из конденсатора

ёмкости  $C$  и соленоида индуктивности  $\mathcal{L}$  (рис. 24). Пусть  $q(t)$  — заряд на верхней пластине конденсатора, тогда ток в соленоиде есть  $\dot{q}$ . Пренебрегая потерями на сопротивление и излучение, получаем в качестве уравнений Кирхгофа уравнение колебательного контура (в системе единиц СИ):

$$\mathcal{L}\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0. \quad (18.3)$$

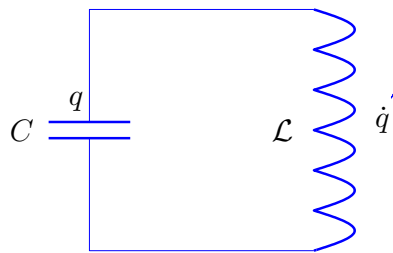


Рис. 24. Колебательный контур

Легко видеть, что это уравнение можно получить как уравнение Лагранжа из лагранжиана

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\dot{q}^2 - \frac{q^2}{2C} \quad (18.4)$$

с обобщённой координатой  $q$ , равной заряду на пластине конденсатора. Роль кинетической энергии играет энергия магнитного поля в соленоиде, а роль потенциальной — энергия электрического поля в конденсаторе. Отметим, что из лагранжиана (4) получается правильное значение энергии системы

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{L}\dot{q}^2 + \frac{q^2}{2C}. \quad (18.5)$$

Рассматриваемые в этом параграфе электромагнитные поля образуют непрерывную систему. Они описываются уравнениями Максвелла. Последние также могут быть представлены в форме уравнений Лагранжа (для непрерывной среды). Переходя к цепям с сосредоточенными параметрами, мы фактически задаем электрическое поле в конденсаторе всего одной обобщённой координатой — зарядом конденсатора  $q$ , а магнитное поле в соленоиде — током  $\dot{q}$ . При этом мы отвлекаемся от возможности “возбуждения” других степеней свободы электромагнитного поля (скажем, электромагнитных волн). Переход от лагранжиана электромагнитного поля к лагранжиану вида (4) демонстрируется, например, в [3, задача 4.22]. Такое описание непрерывной системы с использованием небольшого числа “существенных” обобщённых координат аналогично описанию движения столбика жидкости в системе рис. 23.

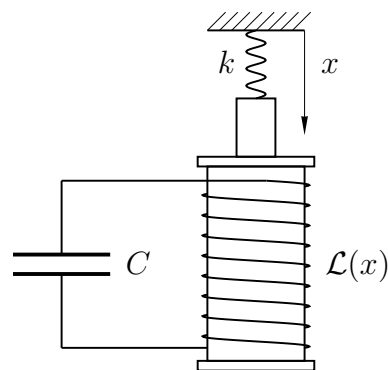


Рис. 25. Электромеханическая система

Замечательно, что таким подходом могут быть охвачены и системы, для движения которых существенны как механические, так и электродинамические степени свободы.

В качестве примера рассмотрим систему рис. 25, состоящую из колебательного  $\mathcal{L}C$ -контура и груза — подвешенного на пружинке сердечника соленоида, причем индуктивность соленоида зависит от смещения груза. Функция Лагранжа этой *электромеханической* системы с двумя степенями свободы

$$L(x, q, \dot{x}, \dot{q}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{\mathcal{L}(x)\dot{q}^2}{2} - \frac{Cq^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \quad (18.6)$$

приводит к уравнениям движения, связывающим заряд конденсатора  $q$  и смещение сердечника соленоида  $x$  (смещение сердечника отсчитывается от его положения равновесия в отсутствие тока).

Другие примеры электромеханических систем см. в [3, задачи 4.23, 4.24].

# Глава III

## КОЛЕБАНИЯ

### § 19. Линейные колебания

Практически невозможно указать область физики, в которой не приходилось бы сталкиваться с линейными колебаниями. На примере одномерной системы напомним основные определения и введем обозначения.

#### 19.1. Одна степень свободы

Пусть лагранжиан системы с одной степенью свободы есть

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q), \quad T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 \geq 0. \quad (19.1)$$

Если  $q_0$  есть точка минимума потенциальной энергии, то разложение  $U(q)$  в ряд по малому отклонению  $x = q - q_0$  начинается с положительного квадратичного слагаемого

$$U(q) = U(q_0) + \frac{1}{2} k x^2, \quad \left. \frac{dU}{dq} \right|_{q_0} = 0, \quad \left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q_0} = k > 0 \quad (19.2)$$

(случай  $k = 0$  соответствует нелинейным колебаниям). Разложим функцию  $a(q)$  вблизи  $q_0$ :

$$a(q) = m + \mathcal{O}(x), \quad m = a(q_0). \quad (19.3)$$

В итоге, ограничиваясь членами второго порядка по  $x$  и  $\dot{x} = \dot{q}$ , получаем (отбрасывая константу  $U(q_0)$ )

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2. \quad (19.4)$$

Уравнение Лагранжа

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (19.5)$$

подстановкой

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (19.6)$$

приводится к алгебраическому уравнению

$$-m\omega^2 + k = 0, \quad (19.7)$$

откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (19.8)$$

Величина  $A$  называется *амплитудой*,  $\omega t + \varphi$  — *фазой*,  $\varphi$  — *начальной фазой*, а  $\omega$  — (*круговой*) *частотой* колебаний. Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (19.9)$$

Из положительности  $m$  и  $k$  вытекает положительность  $\omega^2 = k/m$ . Конечно, переход от исходной механической системы (1) к линеаризованной (4) справедлив лишь при достаточно малых  $x$  (или  $A$ ).

## 19.2. Колебания систем со многими степенями свободы

Рассмотрим теперь случай нескольких степеней свободы:

$$L = T - U(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad T = \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^s a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \geq 0. \quad (19.10)$$

Так как произведение  $\dot{q}_i \dot{q}_j$  симметрично относительно замены  $i \leftrightarrow j$ , то матрицу  $a_{ij}(q)$  всегда можно выбрать симметричной:

$$a_{ij}(q) = a_{ji}(q). \quad (19.11)$$

Пусть  $q_{i0}$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) есть точка минимума потенциальной энергии, тогда разложение потенциальной энергии в ряд по малым отклонениям  $x_i = q_i - q_{i0}$  начинается с квадратичных слагаемых

$$U(q) = \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} x_i x_j + \text{const}, \quad k_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_{i0}} = k_{ji}. \quad (19.12)$$

Поскольку при  $x_i = 0$  потенциальная энергия минимальна, квадратичная форма (12) является положительно определённой:

$$\sum_{ij} k_{ij} x_i x_j \geq 0. \quad (19.13)$$

Разложим функцию  $a_{ij}(q)$  вблизи  $q_{i0}$ :

$$a_{ij}(q) = m_{ij} + \mathcal{O}(x_k); \quad m_{ij} = a_{ij}(q_{k0}) = m_{ji}. \quad (19.14)$$

Из положительности кинетической энергии следует, что квадратичная форма

$$\sum_{ij} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j \geq 0 \quad (19.15)$$

также является положительно определённой. Ограничиваясь членами второго порядка по  $x_i$  и  $\dot{x}_i = \dot{q}_i$ , получаем

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - k_{ij} x_i x_j). \quad (19.16)$$

В дальнейшем удобно перейти к векторным обозначениям. Введём вектор смещения

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix},$$

матрицы масс и жёсткостей

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1s} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{s1} & m_{s2} & \dots & m_{ss} \end{pmatrix}, \quad \hat{k} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{s1} & k_{s2} & \dots & k_{ss} \end{pmatrix}$$

и скалярное произведение векторов:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^s x_i y_i.$$

В этих обозначениях лагранжиан принимает вид

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{x}}, \hat{m} \dot{\mathbf{x}}) - \frac{1}{2}(\mathbf{x}, \hat{k} \mathbf{x}), \quad (19.17)$$

причём

$$(\dot{\mathbf{x}}, \hat{m} \dot{\mathbf{x}}) \geq 0, \quad (\mathbf{x}, \hat{k} \mathbf{x}) \geq 0, \quad \hat{m}^T = \hat{m}, \quad \hat{k}^T = \hat{k}, \quad (19.18)$$

где  $\hat{m}^T$  обозначает матрицу, транспонированную по отношению к матрице  $\hat{m}$ . Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}$$

в этих обозначениях принимают форму, аналогичную (5):

$$\hat{m} \ddot{\mathbf{x}} + \hat{k} \mathbf{x} = 0. \quad (19.19)$$

Подстановка

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} \cos(\omega t + \varphi) \quad (19.20)$$

приводит их к системе алгебраических линейных однородных уравнений

$$\left( -\omega^2 \hat{m} + \hat{k} \right) \mathbf{A} = 0. \quad (19.21)$$

Эта система имеет нетривиальное решение, только если её определитель обращается в нуль:

$$\left| -\omega^2 \hat{m} + \hat{k} \right| = 0. \quad (19.22)$$

Пусть  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_s^2$  — корни этого уравнения (некоторые из этих корней могут совпадать друг с другом; этот случай рассмотрен в следующем параграфе). Величины  $\omega_\alpha$  называются *собственными частотами*. Подставляя один из этих корней  $\omega_\alpha^2$  в уравнение (21), получаем уравнение для определения компонент соответствующего вектора  $\mathbf{A}^{(\alpha)}$ :

$$\left( -\omega_\alpha^2 \hat{m} + \hat{k} \right) \mathbf{A}^{(\alpha)} = 0. \quad (19.23)$$

Конечно, если  $\mathbf{A}^{(\alpha)}$  есть решение этого уравнения, то и  $a\mathbf{A}^{(\alpha)}$ , где  $a$  — произвольное число, также есть решение этого уравнения. В итоге каждому корню  $\omega_\alpha^2$  (или каждой частоте  $\omega_\alpha$ ) соответствует колебание

$$\mathbf{x}^{(\alpha)}(t) = \mathbf{A}^{(\alpha)}Q_\alpha(t), \quad Q_\alpha(t) = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha), \quad (19.24)$$

при котором все частицы движутся с одной частотой (и в одной фазе или в противофазе). Такое движение называют *нормальным колебанием или модой*. Полное решение есть сумма частных решений

$$\mathbf{x} = \sum_{\alpha=1}^s \mathbf{A}^{(\alpha)}Q_\alpha(t), \quad (19.25)$$

или в записи для отдельных компонент вектора

$$x_i = \sum_{\alpha=1}^s A_i^{(\alpha)}Q_\alpha(t). \quad (19.26)$$

Это полное решение содержит  $s$  произвольных амплитуд  $a_\alpha$  и фаз  $\varphi_\alpha$ , которые можно определить, задавая начальные координаты  $\mathbf{x}(0)$  и скорости  $\dot{\mathbf{x}}(0)$ .

### 19.3. Плоский двойной маятник

Рассмотрим малые колебания плоского двойного маятника (см. рис. 19). Лагранжиан этой системы найден в [1, § 5, задача 1]) и при малых углах  $|\varphi_i| \ll 1$  и  $l_1 = l_2 = l$  имеет вид

$$L = \frac{1}{2}ml^2(8\dot{\varphi}_1^2 + 4\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2) - \frac{1}{2}mgl(4\varphi_1^2 + \varphi_2^2).$$

Матрицы масс и жесткостей таковы:

$$\hat{m} = ml^2 \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{k} = mgl \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение уравнений движения

$$8\ddot{\varphi}_1 + 2\ddot{\varphi}_2 + 4\omega_0^2\varphi_1 = 0, \quad 2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2\varphi_2 = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{g/l}$$

ищем в виде

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cos(\omega t + \chi).$$

Для коэффициентов  $A_i$  получаем систему уравнений

$$(-8\omega^2 + 4\omega_0^2)A_1 - 2\omega^2 A_2 = 0, \quad -2\omega^2 A_1 + (-\omega^2 + \omega_0^2)A_2 = 0.$$

Приравняв её определитель нулю

$$\omega^4 - 3\omega^2\omega_0^2 + \omega_0^4 = 0,$$

найдем собственные частоты

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{3 \mp \sqrt{5}}{2}} \omega_0$$



и соответствующие им нормальные колебания

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{A}^{(1)} Q_1(t), \quad \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{A}^{(2)} Q_2(t); \quad Q_\alpha(t) = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \chi_\alpha).$$

На плоскости  $\varphi_1, \varphi_2$  векторы

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} - 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{5} + 1 \end{pmatrix}$$

задают направление новых осей координат  $Q_1$  и  $Q_2$  (рис. 26).

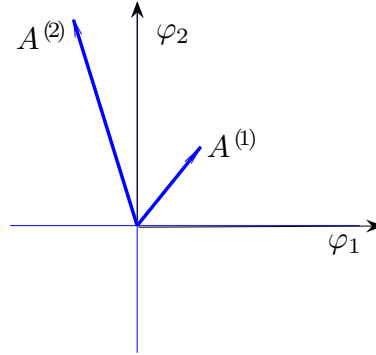


Рис. 26. Векторы нормальных колебаний двойного плоского маятника, изображённого на рис. 19

Вдоль каждого из этих направлений происходят колебания с одной частотой — с  $\omega_1$  вдоль  $\mathbf{A}^{(1)}$  и с  $\omega_2$  вдоль  $\mathbf{A}^{(2)}$ . В то же время координаты

$$\varphi_1 = Q_1 - Q_2, \quad \varphi_2 = (\sqrt{5} - 1)Q_1 + (\sqrt{5} + 1)Q_2$$

представляют собой сумму колебаний с двумя разными частотами.

Угол между векторами  $\mathbf{A}^{(1)}$  и  $\mathbf{A}^{(2)}$  (т. е. и между осями  $Q_1$  и  $Q_2$ ) не равен  $90^\circ$ ; действительно,

$$(\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}) = 3 \neq 0.$$

Легко, однако, проверить, что эти векторы удовлетворяют соотношениям:

$$\left( \mathbf{A}^{(1)}, \hat{k} \mathbf{A}^{(2)} \right) = \left( \mathbf{A}^{(1)}, \hat{m} \mathbf{A}^{(2)} \right) = 0. \quad (19.27)$$

Например,

$$\left( \mathbf{A}^{(1)}, \frac{\hat{k}}{mgl} \mathbf{A}^{(2)} \right) = (1, \sqrt{5} - 1) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{5} + 1 \end{pmatrix} = (1, \sqrt{5} - 1) \begin{pmatrix} -4 \\ \sqrt{5} + 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Ниже мы покажем, что найденные в этом примере соотношения (27) справедливы и в общем случае.

## § 20. Ортогональность нормальных колебаний. Случай вырождения частот

### 20.1. Ортогональность нормальных колебаний

Пусть  $\omega_\alpha$  и  $\omega_\beta$  - различные собственные частоты:  $\omega_\alpha \neq \omega_\beta$ . Соответствующие им векторы колебаний  $\mathbf{A}^{(\alpha)}$  и  $\mathbf{A}^{(\beta)}$  удовлетворяют уравнениям

$$\omega_\alpha^2 \hat{m} \mathbf{A}^{(\alpha)} = \hat{k} \mathbf{A}^{(\alpha)}, \quad \omega_\beta^2 \hat{m} \mathbf{A}^{(\beta)} = \hat{k} \mathbf{A}^{(\beta)}. \quad (20.1)$$

Умножим второе уравнение на  $\mathbf{A}^{(\alpha)}$ :

$$\omega_\beta^2 (\mathbf{A}^{(\alpha)}, \hat{m} \mathbf{A}^{(\beta)}) = (\mathbf{A}^{(\alpha)}, \hat{k} \mathbf{A}^{(\beta)}). \quad (20.2)$$

Вычтем его из первого уравнения, умноженного на  $\mathbf{A}^{(\beta)}$ :

$$\omega_\alpha^2 (\mathbf{A}^{(\beta)}, \hat{m} \mathbf{A}^{(\alpha)}) - \omega_\beta^2 (\mathbf{A}^{(\alpha)}, \hat{m} \mathbf{A}^{(\beta)}) = (\mathbf{A}^{(\beta)}, \hat{k} \mathbf{A}^{(\alpha)}) - (\mathbf{A}^{(\alpha)}, \hat{k} \mathbf{A}^{(\beta)}). \quad (20.3)$$

Учитывая, что для любой вещественной матрицы  $\hat{n}$  справедливо соотношение

$$(\mathbf{A}, \hat{n} \mathbf{B}) = (\hat{n}^T \mathbf{A}, \mathbf{B})$$

и тот факт, что матрицы  $\hat{k}$  и  $\hat{m}$  симметричны (см. (19.18)), получаем из (3)

$$(\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2) (\mathbf{A}^{(\alpha)}, \hat{m} \mathbf{A}^{(\beta)}) = 0. \quad (20.4)$$

Поскольку  $\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2 \neq 0$ , отсюда следует соотношение

$$(\mathbf{A}^{(\alpha)}, \hat{m} \mathbf{A}^{(\beta)}) = 0 \quad (20.5a)$$

и далее, с учетом (2), еще одно соотношение

$$(\mathbf{A}^{(\alpha)}, \hat{k} \mathbf{A}^{(\beta)}) = 0. \quad (20.5b)$$

Полученные соотношения означают, что колебания  $\mathbf{x}^{(\alpha)} = \mathbf{A}^{(\alpha)} Q_\alpha$  и  $\mathbf{x}^{(\beta)} = \mathbf{A}^{(\beta)} Q_\beta$ , отвечающие различным частотам, взаимно ортогональны, если их скалярное произведение определять с помощью метрических тензоров  $m_{ij}$  или  $k_{ij}$  (как говорят,  $\mathbf{x}^{(\alpha)}$  и  $\mathbf{x}^{(\beta)}$  ортогональны в “метрике масс” или в “метрике жёсткостей”).

### 20.2. Случай вырождения частот. Нормальные координаты

Рассмотрим теперь случай, когда среди корней характеристического уравнения (19.22) имеются кратные корни — случай с *вырожденными частотами*. Пусть, например, два разных решения  $\mathbf{x}^{(1)}$  и  $\mathbf{x}^{(2)}$  отвечают одной и той же частоте  $\omega_1 = \omega_2$ . Линейная суперпозиция  $c_1 \mathbf{x}^{(1)} + c_2 \mathbf{x}^{(2)}$ , где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные числа, также является решением с той же самой частотой. Иными словами, пространство решений, отвечающих данной частоте, представляют собой плоскость, проходящую через векторы  $\mathbf{x}^{(1)}$  и  $\mathbf{x}^{(2)}$ , причем любой вектор этой плоскости ортогонален в метрике масс или

жёсткостей векторам нормальных колебаний, отвечающих другим частотам. Ясно, что среди векторов этой плоскости всегда можно выбрать (и притом многими способами) пару независимых векторов так, чтобы они удовлетворяли соотношениям ортогональности (5).

Совокупность взаимно ортогональных (в метрике масс или в метрике жёсткостей) векторов представляет собой очень удобный базис для координат  $Q_\alpha$ . Покажем, что эти координаты приводят лагранжиан к виду, соответствующему набору независимых (невзаимодействующих) осцилляторов. Такие координаты называются *нормальными координатами*. Иными словами, переход вида (19.25) от координат  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_s)$  к нормальным координатам  $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_\alpha, \dots, Q_s)$  есть линейное преобразование

$$\mathbf{x} = \hat{U}\mathbf{Q}, \quad x_i = \sum_{\alpha} U_{i\alpha} Q_{\alpha}, \quad U_{i\alpha} \equiv A_i^{(\alpha)},$$

при котором квадратичные формы кинетической и потенциальной энергий одновременно приводятся к диагональному виду.

Действительно, сделав в лагранжиане (19.17) подстановку (19.20) и используя свойства ортогональности (5), мы найдем, что в новых переменных лагранжиан имеет вид суммы отдельных независимых лагранжианов типа (19.4):

$$L = \sum_{\alpha=1}^s L_{\alpha}, \quad L_{\alpha} = \frac{1}{2} M_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha}^2 - \frac{1}{2} K_{\alpha} Q_{\alpha}^2,$$

$$M_{\alpha} = (\mathbf{A}^{(\alpha)}, \hat{m} \mathbf{A}^{(\alpha)}), \quad K_{\alpha} = (\mathbf{A}^{(\alpha)}, \hat{k} \mathbf{A}^{(\alpha)}), \quad (20.6)$$

а соответствующие уравнения Лагранжа

$$M_{\alpha} \ddot{Q}_{\alpha} + K_{\alpha} Q_{\alpha} = 0 \quad (20.7)$$

имеют вид одномерных уравнений (19.5). Таким образом, каждая из координат  $Q_{\alpha}$  представляет собой колебание с одной определённой частотой  $\omega_{\alpha}$ , в то время как каждая координата  $x_i$  есть линейная суперпозиция колебаний с разными, вообще говоря, частотами (см. (19.26)).

Отметим, что в силу свойств положительности (19.18) собственные корни уравнения (19.22) являются положительными:

$$\omega_{\alpha}^2 = \frac{K_{\alpha}}{M_{\alpha}} = \frac{(\mathbf{A}^{(\alpha)}, \hat{k} \mathbf{A}^{(\alpha)})}{(\mathbf{A}^{(\alpha)}, \hat{m} \mathbf{A}^{(\alpha)})} \geq 0, \quad (20.8)$$

т. е. собственные частоты  $\omega_{\alpha}$  вещественны. Отметим также, что определяемые этой формулой собственные частоты не зависят от нормировки векторов  $\mathbf{A}^{(\alpha)}$ .

### 20.3. Колебания слабо связанных систем. Биения

Движение линейных систем с вырождением частот обладает рядом интересных особенностей, которые мы обсудим здесь на следующем простом примере. Пусть механическая система состоит из двух слабо связанных подсистем, каждая из которых

в отсутствие связи может совершать малые колебания. На первый взгляд, движение каждой из подсистем в этом случае должно происходить практически независимо и при наличии слабой связи. В действительности эти утверждения справедливы, пока собственные частоты двух разных подсистем не совпадают. Если же эти частоты совпадают или близки, то влияние даже слабой связи на движение системы оказывается весьма значительным.

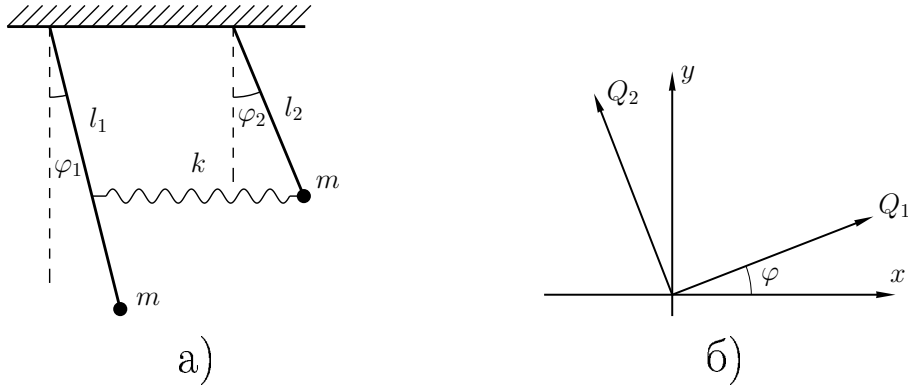


Рис. 27. Слабо связанные системы: *a* — связанные маятники, *б* — нормальные координаты слабо связанных маятников (здесь  $x = l_1\varphi_1$ ,  $y = l_2\varphi_2$ )

Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим пример двух математических маятников одинаковой массы  $m_1 = m_2 = m$ , но разной длины  $l_1$  и  $l_2$ , связанных пружиной малой жёсткости  $k$  (рис. 27, *a*). Пусть углы отклонения маятников от вертикали  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  малы:  $|\varphi_{1,2}| \ll 1$ . В этом случае функция Лагранжа системы в переменных

$$x = l_1\varphi_1, \quad y = l_2\varphi_2$$

равна

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 - \omega_x^2 x^2 + \dot{y}^2 - \omega_y^2 y^2 + 2\alpha xy],$$

$$\omega_x = \sqrt{\frac{g}{l_1} + \frac{kl_2^2}{ml_1^2}}, \quad \omega_y = \sqrt{\frac{g}{l_2} + \frac{k}{m}}, \quad \alpha = \frac{kl_2}{ml_1}.$$

При  $\alpha = 0$  имеем два независимых маятника с частотами  $\omega_x$  и  $\omega_y$  (мы будем называть их *парциальными частотами*). Примем для определённости, что  $l_1 \geq l_2$ , тогда  $\omega_x \leq \omega_y$ . На первый взгляд, при  $\alpha \ll \omega_x^2$  связь этих двух маятников является слабой и её влияние на движение системы незначительно. Прямым расчётом проверим, так ли это.

Легко получить, что переход к нормальным координатам

$$Q_{1,2}(t) = a_{1,2} \cos(\omega_{1,2}t + \chi_{1,2})$$

соответствует повороту на угол  $\varphi$  в плоскости  $xy$  (см. рис. 27, *б*):

$$x = Q_1 \cos \varphi - Q_2 \sin \varphi, \quad y = Q_1 \sin \varphi + Q_2 \cos \varphi, \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\alpha}{\omega_y^2 - \omega_x^2},$$

а собственные частоты равны

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ \omega_x^2 + \omega_y^2 \mp \sqrt{(\omega_y^2 - \omega_x^2)^2 + 4\alpha^2} \right],$$

причем  $\omega_1 < \omega_x$ , а  $\omega_2 > \omega_y$ . Отсюда видно, что угол поворота  $\varphi$  мал не при  $\alpha \ll \omega_x^2$ , а при

$$\alpha \ll \omega_y^2 - \omega_x^2. \quad (20.9)$$

Иными словами, связь является слабой при выполнении условия (9), когда  $\varphi \approx 0$ , нормальные колебания локализованы:

$$x \approx Q_1, \quad y \approx Q_2,$$

а собственные частоты близки к парциальным:  $\omega_1 \approx \omega_x$ ,  $\omega_2 \approx \omega_y$ .

Если же  $\alpha \ll \omega_x^2$ , но парциальные частоты близки, так что  $\alpha \gg \omega_y^2 - \omega_x^2$ , то  $\varphi \approx \pi/4$  и нормальные колебания перестают быть локализованы:

$$x \approx \frac{Q_1 - Q_2}{\sqrt{2}}, \quad y \approx \frac{Q_1 + Q_2}{\sqrt{2}}. \quad (20.10)$$

В этих условиях могут возникнуть *биения*, соответствующие значительной перекачке энергии колебаний от одного маятника к другому. Пусть, например,  $l_1 = l_2 = l$  и в начальный момент возбуждены лишь колебания первого маятника:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0, \quad (20.11)$$

тогда нормальные колебания

$$Q_1(t) = \frac{x_0}{\sqrt{2}} \cos \omega_1 t, \quad Q_2(t) = -\frac{x_0}{\sqrt{2}} \cos \omega_2 t, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}},$$

а движения маятников имеют вид

$$\varphi_1(t) = \frac{x_0}{l} \cos \varepsilon t \cos \omega t, \quad \varphi_2(t) = \frac{x_0}{l} \sin \varepsilon t \sin \omega t, \quad (20.12)$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_1) \approx \frac{k}{2m} \sqrt{\frac{l}{g}} \ll \omega = \frac{1}{2} (\omega_2 + \omega_1) \approx \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Из ответа (12) видно, что через время  $\tau = \pi/(2\varepsilon)$  окажутся возбуждёнными лишь колебания второго маятника, затем через время  $2\tau$  система вернётся в исходное состояние и т. д.

## Задачи

**20.1.** Найти свободные колебания системы, изображённой на рис. 28, при которых частицы движутся только вдоль прямой  $AB$ . Рассмотреть случаи: а)  $m_1 = m_2$ ; б)  $m_1 \ll m_2$ ; в)  $m_1 \gg m_2$ . Для случая *a* найти нормальные координаты и выразить через них функцию Лагранжа.

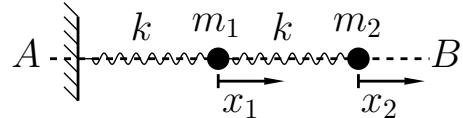


Рис. 28. К задаче 20.1

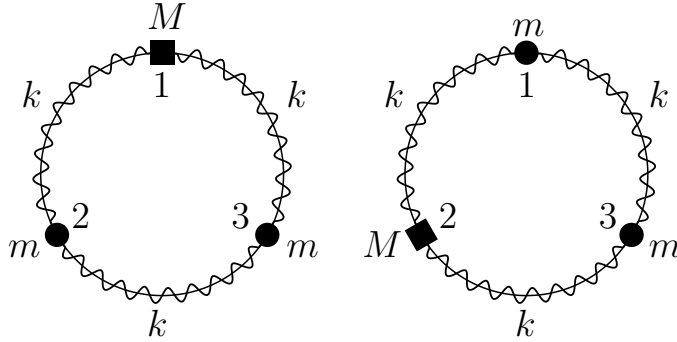


Рис. 29. К задаче 20.2

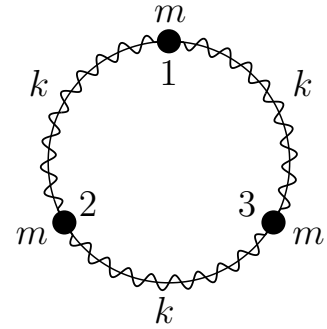


Рис. 30. К задаче 20.3

**20.2.** Найти нормальные колебания трех частиц (рис. 29) на первом и втором кольцах<sup>9</sup>. Рассмотреть переход  $M \rightarrow m$ .

**20.3.** Найти нормальные колебания трех одинаковых частиц, связанных одинаковыми пружинками и могущих двигаться по кольцу (рис. 30). Найти свободные колебания этой системы, если в начальный момент смещения частиц вдоль кольца  $x_1(0) = -x_2(0) = a$ ,  $x_3(0) = 0$ , а начальные скорости равны нулю. Найти свободные колебания при тех же начальных условиях для системы, полученной из описанной при изменении жёсткости пружинки, соединяющей частицы 2 и 3, на малую величину  $\delta k$ .

## § 21. Вынужденные колебания. Резонансы

Пусть на систему, совершающую одномерное колебание, действует (помимо упругой силы  $f_{\text{упр}} = -kx$ ) внешняя сила  $f(t)$ . Соответствующая добавка к потенциальной энергии  $\Delta U(x, t) = -xf(t)$ , поэтому лагранжиан такой системы имеет вид:

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 - kx^2) + xf(t). \quad (21.1)$$

Приведём решение соответствующего уравнения движения

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)/m, \quad \omega = \sqrt{k/m} \quad (21.2)$$

для произвольной силы  $f(t)$  и начальных условий  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$ :

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \int_0^t f(\tau) \frac{\sin \omega(t - \tau)}{\omega m} d\tau. \quad (21.3)$$

<sup>9</sup>Здесь и в дальнейшем предполагается, что кольца гладкие и остаются неподвижными при движении частиц.

Его можно проверить прямой подстановкой. Здесь последнее слагаемое соответствует *вынужденным*, а первые два — *свободным* колебаниям.

При наличии малого трения первые два слагаемых с течением времени исчезают, а последнее лишь незначительно изменяется. В дальнейшем, говоря о вынужденных колебаниях, мы подразумеваем именно такие *установившиеся* колебания. Примеры процессов установления колебаний можно найти, например, в [3, задача 5.11].

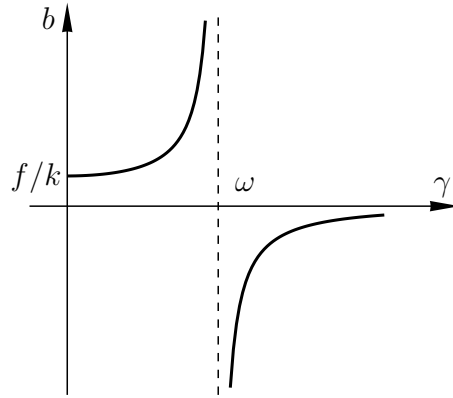


Рис. 31. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний  $b$  от частоты вынуждающей силы  $\gamma$

Для частного случая гармонической силы  $f(t) = f \cos(\gamma t + \varphi)$  вынужденные колебания имеют вид

$$x = b \cos(\gamma t + \varphi), \quad b = \frac{f}{(\omega^2 - \gamma^2)m}. \quad (21.4)$$

Зависимость амплитуды  $b$  от частоты внешней силы  $\gamma$  показана на рис. 31. При  $\gamma < \omega$  колебания совершаются в фазе с действующей силой ( $b/f > 0$ ), а при  $\gamma > \omega$  — в противофазе ( $b/f < 0$ ), причем при  $\gamma \gg \omega$  амплитуда колебаний мала ( $b/f \ll 1/k$ ):

$$b \approx -\frac{f}{m\gamma^2}, \quad \gamma \gg \omega. \quad (21.4a)$$

При  $\gamma \rightarrow \omega$  амплитуда  $b \rightarrow \infty$ , наступает *резонанс*.

Обобщение на случай многих степеней свободы достаточно простое, поскольку переход к нормальным координатам в данном случае сводит исходную систему к набору одномерных осцилляторов, совершающих вынужденные колебания.

Пусть добавка к лагранжиану свободных колебаний (19.17) имеет вид

$$\Delta L = \sum_i x_i F_i(t).$$

Введём вектор силы

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_s(t) \end{pmatrix},$$

тогда

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{x}}, \hat{m} \dot{\mathbf{x}}) - \frac{1}{2}(\mathbf{x}, \hat{k} \mathbf{x}) + \mathbf{x} \mathbf{F}(t); \quad (21.1a)$$

$$\hat{m} \ddot{\mathbf{x}} + \hat{k} \mathbf{x} = \mathbf{F}(t). \quad (21.2a)$$

Перейдём в этом лагранжиане от переменных  $\mathbf{x}$  к нормальным координатам  $\mathbf{Q}$  с помощью замены (19.25), при этом

$$\mathbf{x} \mathbf{F}(t) = \sum_{\alpha} \mathbf{A}^{(\alpha)} \mathbf{F}(t) \cdot Q_{\alpha}$$

и исходный лагранжиан перейдёт в сумму лагранжианов типа (1):

$$L = \sum_{\alpha=1}^s L_{\alpha}, \quad L_{\alpha} = \frac{1}{2}(M_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha}^2 - K_{\alpha} Q_{\alpha}^2) + Q_{\alpha} f_{\alpha}(t), \quad (21.5)$$

где  $M_{\alpha}$  и  $K_{\alpha}$  определены в (20.6), а сила

$$f_{\alpha}(t) = \mathbf{A}^{(\alpha)} \mathbf{F}(t). \quad (21.6)$$

После этого уравнения движения для  $Q_{\alpha}$  совпадают с одномерным уравнением (2):

$$\ddot{Q}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha} = \frac{f_{\alpha}(t)}{M_{\alpha}}, \quad \omega_{\alpha} = \sqrt{\frac{K_{\alpha}}{M_{\alpha}}}. \quad (21.2b)$$

Рассмотрим случай гармонической силы  $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F} \cos(\gamma t + \varphi)$ ; тогда

$$F_{\alpha}(t) = f_{\alpha} \cos(\gamma t + \varphi), \quad f_{\alpha} = \mathbf{A}^{(\alpha)} \mathbf{F} \quad (21.7)$$

и вынужденные колебания нормальных координат имеют вид

$$Q_{\alpha} = b_{\alpha} \cos(\gamma t + \varphi), \quad b_{\alpha} = \frac{f_{\alpha}}{(\omega_{\alpha}^2 - \gamma^2) M_{\alpha}}. \quad (21.3a)$$

Перейдя от нормальных координат к исходным, имеем

$$\mathbf{x} = \sum_{\alpha=1}^s \mathbf{A}^{(\alpha)} b_{\alpha} \cos(\gamma t + \varphi) = \sum_{\alpha=1}^s \mathbf{A}^{(\alpha)} \frac{(\mathbf{A}^{(\alpha)}, \mathbf{F})}{(\omega_{\alpha}^2 - \gamma^2) (\mathbf{A}^{(\alpha)}, \hat{m} \mathbf{A}^{(\alpha)})} \cos(\gamma t + \varphi). \quad (21.8)$$

Отметим, что этот ответ не зависит от нормировки векторов  $\mathbf{A}^{(\alpha)}$ .

Сила  $f_{\alpha} = \mathbf{A}^{(\alpha)} \mathbf{F}$ , действующая на  $\alpha$ -е нормальное колебание, определяется проекцией вектора силы  $\mathbf{F}$  на направление данного нормального колебания. Поэтому если  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{A}^{(\alpha)}$  взаимно ортогональны,  $\mathbf{F} \mathbf{A}^{(\alpha)} = 0$ , то соответствующее слагаемое  $\mathbf{A}^{(\alpha)} b_{\alpha} \cos(\gamma t + \varphi)$  вообще отсутствует в сумме (8). В частности, в этом случае не возникает резонанса при  $\gamma \rightarrow \omega_{\alpha}$ . Если же  $\mathbf{F} \mathbf{A}^{(\alpha)} \neq 0$ , то при  $\gamma \rightarrow \omega_{\alpha}$  возникает резонанс, причём вблизи резонанса всеми слагаемыми в сумме (8), кроме одного, можно пренебречь и  $\mathbf{x} \approx \mathbf{A}^{(\alpha)} b_{\alpha} \cos(\gamma t + \varphi)$ .

**Вопрос.** Пусть вектор  $\mathbf{F}$  параллелен какому-либо нормальному колебанию, например,

$$\mathbf{F} = \text{const} \cdot \mathbf{A}^{(1)}.$$



Ясно, что при  $\gamma \rightarrow \omega_1$  возникает резонанс. Может ли такая сила возбудить другие нормальные колебания (т. е. будет ли резонанс при  $\gamma \rightarrow \omega_2, \gamma \rightarrow \omega_3, \dots, \gamma \rightarrow \omega_s$ )?

Для вынужденных колебаний переход к нормальным координатам удобен тем, что сводит многомерную задачу к набору одномерных. В частном случае гармонической силы можно обойтись и без такого перехода. Ищем решение уравнений (2а) в виде  $\mathbf{x} = \mathbf{V} \cos(\gamma t + \varphi)$ . Для определения амплитуды  $\mathbf{V}$  получаем уравнение

$$(-\gamma^2 \hat{m} + \hat{k})\mathbf{V} = \mathbf{F},$$

откуда

$$\mathbf{x} = (-\gamma^2 \hat{m} + \hat{k})^{-1} \mathbf{F} \cos(\gamma t + \varphi). \quad (21.9)$$

## Задача

**21.1.** Найти установившиеся колебания системы, описанной в задаче 20.1а, если точка  $A$  движется по закону  $a(t) = a \cos \gamma t$ . При какой частоте  $\gamma$  амплитуда вынужденных колебаний первой частицы обратится в нуль? Тот же вопрос для цепочки из трёх одинаковых частиц.

## § 22. Колебания с трением

В макроскопических системах всегда есть трение. Оно качественно изменяет как собственные колебания систем, так и резонансный отклик на внешнюю гармоническую силу. Характер сил трения различается при скольжении соприкасающихся твёрдых тел и при движении твёрдого тела в жидкости или газе. В данном разделе мы рассмотрим только этот последний случай.

Рассмотрим влияние трения на собственные колебания одномерного гармонического осциллятора, описываемого координатой  $x$ . Учтём силу трения прямо во втором законе Ньютона. Из опыта известно, что эта сила направлена противоположно скорости, и при малом абсолютном значении скорости пропорциональна ей. Это позволяет записать силу трения в виде  $f_{\text{тр}} = -\alpha \dot{x}$ , где  $\alpha$  — положительная константа, характеризующая интенсивность трения. Соответствующее уравнение движения

$$m\ddot{x} = -\alpha \dot{x} - kx$$

разделим на  $m$  и введём обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \lambda = \frac{\alpha}{2m}.$$

Здесь  $\omega_0$  — частота свободных колебаний в отсутствие трения, а величина  $\lambda$  называется *коэффициентом затухания*. Уравнение свободных колебаний запишется в виде

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (22.1a)$$

Полагая

$$x = \text{Re}(e^{rt}),$$

получаем для  $r$  характеристическое уравнение. Это квадратное уравнение, решения которого

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}.$$

Общее решение есть линейная суперпозиция двух решений:

$$x = \operatorname{Re} (C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}) . \quad (22.2)$$

При сильном трении ( $\lambda > \omega_0$ ) оба характеристических показателя отрицательны и общее решение  $x$ , убывая без колебаний, стремится к нулю. Такое движение называется *апериодическим затуханием*.

При  $\lambda = \omega_0$  движение также оказывается апериодическим:

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-\lambda t} .$$

При более слабом трении ( $\lambda < \omega_0$ ) характеристические показатели комплексно сопряжены

$$r_{1,2} = -\lambda \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2},$$

и решение имеет вид

$$x = a e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (22.3)$$

где  $a$  и  $\varphi$  — вещественные постоянные. Такое движение представляет собой *затухающие колебания*.

В важном предельном случае  $\lambda \ll \omega_0$  амплитуда колебаний за время  $T = 2\pi/\omega$  почти не меняется. Средние за это время квадраты координаты и скорости можно вычислять считая множитель  $e^{-\lambda t}$  постоянным. Эти средние квадраты пропорциональны  $e^{-2\lambda t}$  и энергия колебаний убывает по этому же закону:

$$E(t) = E_0 e^{-2\lambda t} .$$

Рассмотрим влияние трения на движение осциллятора под действием внешней гармонической силы  $f \cos(\gamma t + \varphi)$ . Уравнение движения запишется в виде

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos(\gamma t + \varphi) . \quad (22.1b)$$

Решение этого неоднородного линейного уравнения представляют собой сумму двух слагаемых — описанного выше свободного движения и вынужденного (установившегося) колебания. Последнее решение удобно искать в комплексной форме. Для этого запишем

$$\cos(\gamma t + \varphi) = \operatorname{Re} [e^{i(\gamma t + \varphi)}] .$$

Отыскивая решение в виде

$$x = \operatorname{Re} [B e^{i(\gamma t + \varphi)}] ,$$

найдем комплексную амплитуду

$$B = b e^{i\delta} = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)} .$$

Мнимая часть  $B$  всегда отрицательна, а действительная (при возрастании  $\gamma$  от нуля до бесконечности) меняет знак с положительного на отрицательный при  $\gamma = \omega_0$ , значит аргумент  $\delta$  меняется в интервале  $0 > \delta > -\pi$ .

Для вещественной амплитуды  $b$  и аргумента  $\delta$  имеем

$$b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}, \quad \text{ctg } \delta = \frac{\gamma^2 - \omega_0^2}{2\lambda\gamma}. \quad (22.4)$$

Легко найти, что при заданной амплитуде силы  $f$  амплитуда вынужденных колебаний  $b$  максимальна на частоте

$$\gamma_m = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}. \quad (22.5)$$

и равна

$$b_{\max} = b(\gamma_m) = \frac{f}{2m\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \quad (22.6)$$

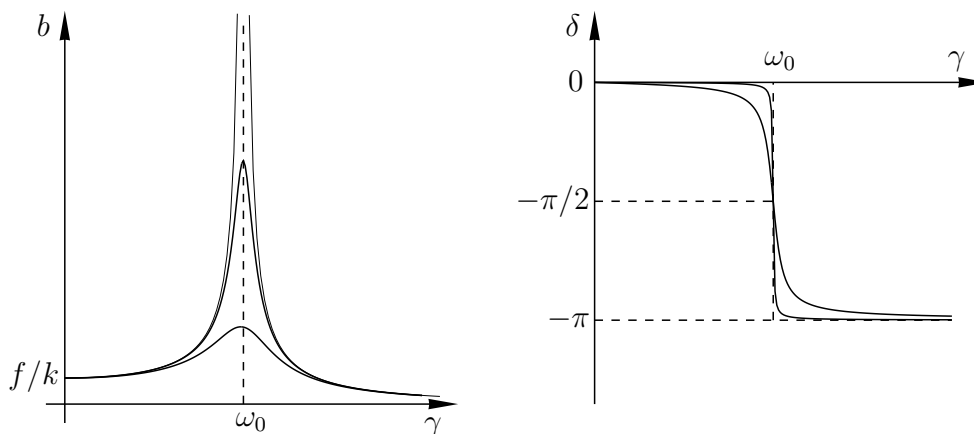


Рис. 32. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний  $b$  и фазы  $\delta$  от частоты вынуждающей силы  $\gamma$  для различных значений коэффициента затухания  $\lambda$

Графики функций  $b$  и  $\delta$  в зависимости от частоты вынуждающей силы  $\gamma$  и при различных значениях  $\lambda$  представлены на рис. 32. При малых  $\lambda$  фаза  $\delta$  близка к нулю (т. е. вынужденные колебания совершаются почти в фазе с действующей силой) при  $\gamma < \omega_0$  и фаза  $\delta$  близка к  $(-\pi)$  (т. е. вынужденные колебания совершаются почти в противофазе с действующей силой) при  $\gamma > \omega_0$ ; переход от одного режима к другому происходит в узком интервале частот  $\gamma$  вблизи  $\omega_0$ .

Свободные колебания осциллятора с трением затухают, со временем остаются только вынужденные колебания вида

$$x = b \cos(\gamma t + \varphi + \delta).$$

Так как фаза  $\delta$  отрицательна, аргумент косинуса этого решения имеет значение, которое аргумент косинуса вынуждающей силы имел в более ранний момент времени; говорят, что вынужденное колебание отстает по фазе от вынуждающей силы.

Рассмотрим окрестность резонанса в практически интересном случае слабого трения  $\lambda \ll \omega_0$ . Обозначив *расстройку частоты*

$$\epsilon = \gamma - \omega_0 \quad (22.7)$$

и заменив в (4) приближенно

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = (\gamma + \omega_0)(\gamma - \omega_0) \approx 2\omega_0\epsilon, \quad 2\lambda\gamma \approx 2\lambda\omega_0, \quad (22.8)$$

получаем

$$b = \frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\epsilon^2 + \lambda^2}}, \quad \text{ctg } \delta = \frac{\epsilon}{\lambda}. \quad (22.9)$$

Максимальная амплитуда вынужденных колебаний обратно пропорциональна  $\lambda$ :

$$b_{\max} = \frac{f}{2m\omega_0\lambda}. \quad (22.10)$$

Квадрат амплитуды колебаний при  $\epsilon = \pm\lambda$  в два раза меньше по сравнению с максимальным значением. Изменение фазы  $\delta$  также происходит, в основном, в этом же интервале частот. Таким образом, характерная ширина области резонанса равна  $\lambda$ .

Полученное решение именно в этом интервале частот существенно отличается от решения для резонанса без трения, даваемого формулой (21.4). Если расстройка частоты больше коэффициента затухания (т. е. если  $|\epsilon| \gg \lambda$ ), то влияние трения становится несущественным и решения для резонанса с трением и без трения практически совпадают.

## § 23. Колебания при наличии гироскопических сил

В § 19, 20 мы рассматривали свободные колебания систем, движущихся под действием потенциальных сил. Линейные колебания, соответствующие малым отклонениям от положения равновесия, в этом случае происходят вблизи минимума потенциальной энергии  $U$ , а отдельное нормальное колебание (19.24) происходит вдоль линии:  $\mathbf{x} = \mathbf{A} \cos(\omega t + \varphi)$ . Рассмотрим теперь линейные колебания систем, в которых помимо потенциальных сил действуют непотенциальные *гироскопические силы*  $\mathbf{F}_g$ , *линейные по скорости частицы и ортогональные этой скорости*.

### 23.1. Гироскопические силы

Мы стартуем от функции Лагранжа для частицы

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = L_0 + L_g, \quad L_0 = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 - U(\mathbf{r}), \quad L_g = \mathbf{v} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{r}), \quad (23.1)$$

где  $\mathbf{C}(\mathbf{r})$  — известная функция  $\mathbf{r}$ . Слагаемое  $L_0$  соответствует движению частицы в потенциальном поле  $U(\mathbf{r})$ , а добавка  $L_g$  приводит к появлению гироскопической силы  $\mathbf{F}_g$ . Действительно, уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0$$

имеют вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_g, \quad \mathbf{F}_g = [\mathbf{v}, [\nabla, \mathbf{C}(\mathbf{r})]]. \quad (23.2)$$

Так как  $\mathbf{F}_g \mathbf{v} = 0$ , работа гироскопической силы равна нулю, а энергия

$$E = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 + U(\mathbf{r})$$

сохраняется.

Приведем примеры гироскопических сил.

При движении частицы с зарядом  $e$  в постоянном магнитном поле  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  (см. § 10) функция

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}),$$

где  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  — векторный потенциал, а гироскопическая сила совпадает с силой Лоренца:

$$\mathbf{F}_g = \frac{e}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}(\mathbf{r})].$$

При движении частицы в системе отсчета, вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\boldsymbol{\Omega}$  (см. § 17.2), функция

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = m [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}],$$

а гироскопическая сила совпадает с кориолисовой силой:

$$\mathbf{F}_g = 2m[\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}].$$

Линейные колебания при наличии гироскопических сил имеют интересные особенности. В частности, малые колебания могут происходить не только вблизи минимума потенциальной энергии  $U$ , но также и вблизи максимума  $U$ , а траектория таких колебаний с определенной частотой не обязательно имеет вид прямой (19.24). Рассмотрим три поучительных примера.

## 23.2. Заряженная частица в потенциальном и магнитном полях

Пусть потенциальная энергия

$$U(x, y) = \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2,$$

а постоянное однородное магнитное поле направлено по оси  $z$ , т. е.

$$\mathbf{B} = (0, 0, B).$$

Мы будем рассматривать движение частицы лишь в плоскости  $xy$ . Потенциальная энергия  $U(x, y)$  имеет экстремум в точке  $x = y = 0$ . Обозначим  $\omega_B = eB/(mc)$  и  $k_B = m\omega_B^2 > 0$ . Уравнения движения частицы имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k_x x - m\omega_B \dot{y} &= 0, \\ m\ddot{y} + k_y y + m\omega_B \dot{x} &= 0. \end{aligned}$$

Будем искать решения этих уравнений в виде колебаний

$$x = \operatorname{Re}(Ae^{i\omega t}), \quad y = \operatorname{Re}(Be^{i\omega t}),$$

где комплексная амплитуда  $A = ae^{i\varphi}$ . Чтобы система однородных уравнений

$$\begin{aligned} (k_x - m\omega^2)A - im\omega_B\omega B &= 0, \\ im\omega_B\omega A + (k_y - m\omega^2)B &= 0 \end{aligned}$$

имела нетривиальное решение, должно выполняться уравнение

$$m^2\omega^4 - m\omega^2(k_B + k_x + k_y) + k_x k_y = 0.$$

Легко проверить, что корни этого уравнения

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2m} \left[ k_B + k_x + k_y \pm \sqrt{(k_B + k_x + k_y)^2 - 4k_x k_y} \right]$$

положительны при выполнении одного из двух условий:

1) либо при

$$k_x > 0, \quad k_y > 0 \quad (23.3)$$

(при этом потенциальная энергия имеет минимум в точке  $x = y = 0$ );

2) либо при

$$k_x < 0, \quad k_y < 0 \quad (23.4a)$$

и достаточно большом магнитном поле

$$k_B > -k_x - k_y + 2\sqrt{k_x k_y} \quad (23.4b)$$

(при этом потенциальная энергия имеет максимум в точке  $x = y = 0$ ).

В обоих этих случаях решения представляют собой колебания вблизи начала координат:

$$\begin{aligned} x &= a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha), \\ y &= b_\alpha \sin(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha), \end{aligned}$$

где

$$b_\alpha = \frac{m\omega_B\omega_\alpha}{k_y - m\omega_\alpha^2} a_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

Рассмотрим для определенности вариант  $k_x > k_y > 0$ . В этом случае первое из найденных колебаний представляет собой движение по часовой стрелке по эллипсу с большой осью, направленной вдоль оси  $x$ , а второе — в обратном направлении по эллипсу с большой осью, лежащей вдоль оси  $y$  (подробнее об этом случае можно прочитать, например, в задаче 6.36 из [3]).

Свободное движение осциллятора представляет собой суперпозицию найденных колебаний. Эти колебания можно назвать *нормальными*, обобщая тем самым понятие нормального колебания: движения в направлениях осей  $x$  и  $y$  происходят с одной и той же частотой, но со сдвигом фаз. Привести функцию Лагранжа к диагональному виду с помощью линейного преобразования только координат невозможно (переход к нормальным координатам связан в этом случае с каноническим преобразованием — см. задачи 11.7 и 11.9 из [3]).

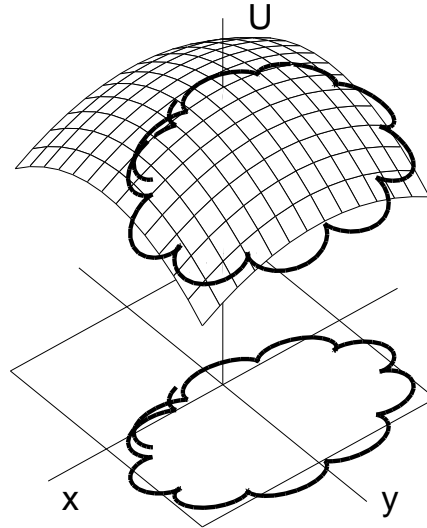


Рис. 33. Гироскопические силы не дают частице упасть с потенциального холма

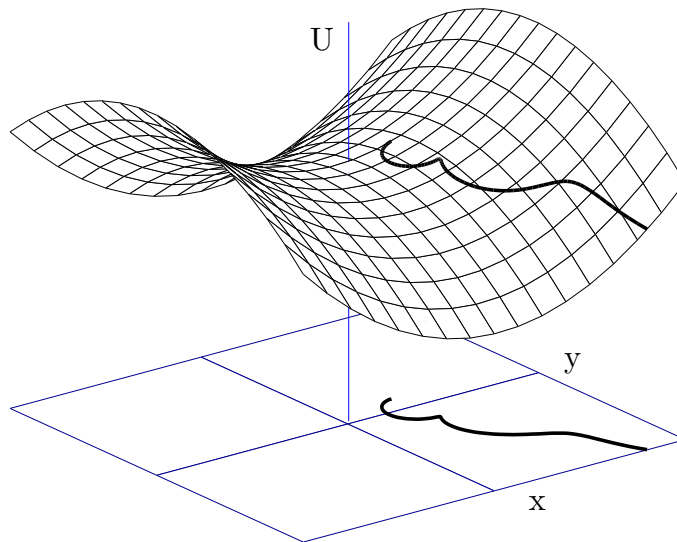


Рис. 34. Частица покидает седловую точку потенциальной энергии, двигаясь примерно по линии уровня

На рис. 33 показана траектория движения частицы для второго варианта. Устойчивость колебания вблизи максимума потенциальной энергии в этом случае обеспечивается достаточно большой силой Лоренца.

Если условия (3) или (4) не выполнены, то по крайней мере один из корней  $\omega_{1,2}^2$  перестает быть положительным и соответствующее решение отвечает уходу частицы от начала координат (рис. 34).

### 23.3. Частица внутри гладкого вращающегося параболоида в поле тяжести

Рассмотрим гладкий параболоид

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b},$$

вращающийся вокруг вертикальной оси  $z$  с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ . Ускорение силы тяжести  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ . Найдем, при каком значении  $\Omega$  нижнее положение неустойчиво для частицы, находящейся внутри параболоида.

Пусть  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$  — радиус-вектор и скорость частицы во вращающейся системе координат. Функция Лагранжа в этой системе равна

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= \frac{m}{2} (\mathbf{v} + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}])^2 + m\mathbf{g}\mathbf{r} = \\ &= \frac{m}{2} \left[ (\dot{x} - \Omega y)^2 + (\dot{y} + \Omega x)^2 + \dot{z}^2 - g \left( \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \right) \right]. \end{aligned}$$

Для малых колебаний можно опустить слагаемое  $m\dot{z}^2/2$ , тогда уравнения движения отличаются от уравнений движения в § 23.2 лишь заменами

$$\frac{k_x}{m} \rightarrow \frac{g}{a} - \Omega^2, \quad \frac{k_y}{m} \rightarrow \frac{g}{b} - \Omega^2, \quad \omega_B \rightarrow 2\Omega.$$

Теперь легко убедиться, что движение вблизи начала координат будет устойчивым при

$$\left( \frac{g}{a} - \Omega^2 \right) \left( \frac{g}{b} - \Omega^2 \right) > 0,$$

а при выполнении условия

$$\left( \frac{g}{a} - \Omega^2 \right) \left( \frac{g}{b} - \Omega^2 \right) < 0$$

частица уходит от начала координат. Считая для определенности  $a > b$ , получаем область неустойчивости

$$\frac{g}{a} < \Omega^2 < \frac{g}{b}.$$

Обратим внимание на то, что при  $\Omega^2 > g/b$  движение устойчиво, хотя потенциальная энергия во вращающейся системе отсчета

$$U = -\frac{m}{2} \left( \Omega^2 - \frac{g}{a} \right) x^2 - \frac{m}{2} \left( \Omega^2 - \frac{g}{b} \right) y^2$$

представляет не потенциальную яму, а потенциальный горб. Устойчивость в этом случае обеспечивается действием силы Кориолиса.

### 23.4. Точки Лагранжа в Солнечной системе

Интересный пример проявления гироскопических сил — движение групп астероидов под воздействием Солнца и Юпитера вблизи так называемых точек Лагранжа<sup>10</sup>. Будем для простоты представлять орбиту Юпитера окружностью. В системе

<sup>10</sup>Подробнее об этом можно прочитать, например, в задаче 9.27 из [3].



отсчёта, вращающейся с такой же угловой скоростью, с какой Юпитер движется вокруг Солнца, на астероид действуют потенциальные силы притяжения к Солнцу и Юпитеру и центробежная сила инерции. Точками Лагранжа называют такие точки, в которых сумма этих сил равна нулю. Две таких точки движутся по орбите Юпитера на  $60^\circ$  впереди и позади него. Иначе говоря, Солнце, Юпитер и точка Лагранжа образуют правильный треугольник.

Потенциальная энергия как функция координат, определяющих положение в плоскости орбиты, имеет вблизи точки Лагранжа максимум. Однако движение астероида вблизи точки Лагранжа оказывается устойчивым из-за влияния кориолисовой силы.

Вблизи указанных точек Лагранжа, действительно, наблюдаются астероиды.

## § 24. Колебания симметричных систем

Многие системы — механические и электротехнические устройства, кристаллическая решётка твёрдого тела, молекулы и т. д. — обладают теми или иными свойствами симметрии. Приведём примеры симметричных молекул. Линейная молекула  $\text{CO}_2$  (рис. 35) не изменяется при повороте на  $180^\circ$  вокруг оси  $y$ . Плоская молекула  $\text{C}_2\text{H}_4$  (рис. 36) не изменяется при поворотах на  $180^\circ$  вокруг оси  $x$  или вокруг оси  $y$ , при зеркальном отражении в плоскости  $xz$  или в плоскости  $yz$ . Плоская молекула хлорида бора  $\text{BCl}_3$  (рис. 37) не изменяется при повороте на  $120^\circ$  или на  $240^\circ$  вокруг оси  $z$ . Эти свойства молекул находят свое отражение в специфике собственных колебаний молекул и, соответственно, в спектрах излучения, поглощения и комбинационного рассеяния света.

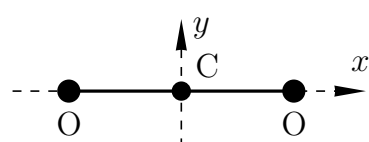


Рис. 35. Молекула  $\text{CO}_2$

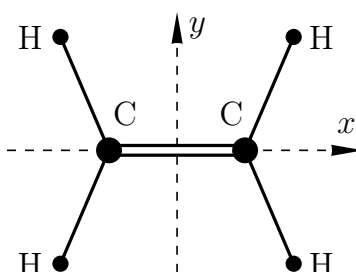


Рис. 36. Молекула  $\text{C}_2\text{H}_4$

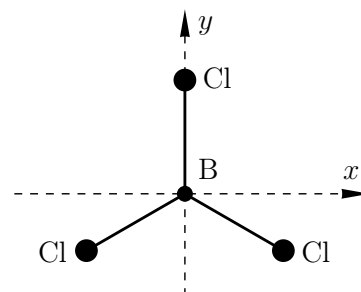


Рис. 37. Молекула  $\text{BCl}_3$

Последовательное рассмотрение таких свойств симметрии проводится с помощью теории групп. Здесь мы дадим доказательство только нескольких полезных свойств систем с простой симметрией.

Пусть система, совершающая линейные колебания (а следовательно, и её функция Лагранжа  $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ ), не изменяет своего вида при замене

$$\mathbf{x} \rightarrow \hat{S} \mathbf{x}, \quad \dot{\mathbf{x}} \rightarrow \hat{S} \dot{\mathbf{x}}, \quad (24.1)$$

причем постоянные коэффициенты  $S_{ij}$ , образующие матрицу  $\hat{S}$ , удовлетворяют

условиям<sup>11</sup>

$$\hat{S} = \hat{S}^T, \quad \hat{S}\hat{S} = \hat{E}. \quad (24.2)$$

Мы будем говорить, что система обладает симметрией  $S$ . Оказывается собственные колебания такой системы также обладают определёнными свойствами симметрии.

Пусть  $\mathbf{x} = \mathbf{A} \cos(\omega t + \varphi)$  — какое-либо нормальное колебание. Так как замена  $\mathbf{x} \rightarrow \hat{S}\mathbf{x}$  не изменяет лагранжиана и, следовательно, уравнений движения, то  $\hat{S}\mathbf{x}$  также есть нормальное колебание с той же самой частотой. Отсюда вытекает следующее:

а) если данная частота невырождена, то  $\hat{S}\mathbf{x}$  может отличаться от  $\mathbf{x}$  лишь общим множителем, т. е.  $\hat{S}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ . Так как  $\hat{S}\hat{S} = \hat{E}$ , то  $\hat{S}\hat{S}\mathbf{x} = \lambda\hat{S}\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x} = \mathbf{x}$ , или  $\lambda = \pm 1$ . Таким образом, колебание  $\mathbf{x} = \mathbf{A} \cos(\omega t + \varphi)$ , частота которого невырождена, является либо симметричным  $\hat{S}\mathbf{A} = \mathbf{A}$ , либо антисимметричным  $\hat{S}\mathbf{A} = -\mathbf{A}$  относительно преобразования  $S$ ;

б) если данная частота вырождена, то  $\hat{S}\mathbf{x}$  может отличаться от  $\mathbf{x}$  не только общим множителем. Но сумма и разность этих двух решений

$$\mathbf{x} \pm \hat{S}\mathbf{x} = (\mathbf{A} \pm \hat{S}\mathbf{A}) \cos(\omega t + \varphi)$$

также будут нормальными колебаниями с той же самой частотой, причём сумма является симметричным, а разность — антисимметричным колебанием относительно преобразования  $S$ ;

в) пусть на систему действует внешняя сила  $\mathbf{F}(t)$ , симметричная относительно данного преобразования:

$$\hat{S}\mathbf{F}(t) = +\mathbf{F}(t).$$

Если  $\mathbf{x}_a$  — антисимметричное колебание, т. е.  $\hat{S}\mathbf{x}_a = -\mathbf{x}_a$ , то

$$\left( \hat{S}\mathbf{F}(t), \hat{S}\mathbf{x}_a \right) = -\left( \mathbf{F}(t), \mathbf{x}_a \right).$$

С другой стороны,

$$\left( \hat{S}\mathbf{F}(t), \hat{S}\mathbf{x}_a \right) = \left( \mathbf{F}(t), \hat{S}^T \hat{S}\mathbf{x}_a \right) = +\left( \mathbf{F}(t), \mathbf{x}_a \right)$$

в силу свойств (2). Отсюда получаем  $\left( \mathbf{F}(t), \mathbf{x}_a \right) = 0$ , т. е. проекция силы на данное колебание равна нулю и поэтому симметричная сила не влияет на антисимметричные колебания (ср. § 21). Аналогично можно показать, что антисимметричная сила не влияет на симметричное колебание.

**Простой пример.** Две одинаковые частицы соединены одинаковыми пружинками и могут двигаться только вдоль прямой  $AB$  (рис. 38). Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — смещения частиц из положения равновесия. Система не изменяется при повороте на  $180^\circ$  вокруг оси  $y$ , т. е. лагранжиан системы

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2} [x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2] \quad (24.3)$$

<sup>11</sup>Условие  $\hat{S}\hat{S} = E$  или  $\sum_j S_{ij}S_{jk} = \delta_{ik}$  означает, что при двукратном преобразовании система возвращается в исходное состояние. Таким свойством обладают преобразования, рассмотренные выше для примеров на рис. 35 и 36. Напротив, в последнем примере, на рис. 37, двукратное применение поворота на  $120^\circ$  не возвращает систему в исходное состояние.

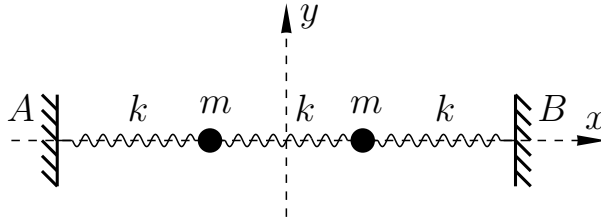


Рис. 38. Простая симметричная система

не изменяется при замене

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{S} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (24.4)$$

Легко проверить, что матрица  $\hat{S}$  удовлетворяет условиям (2). Значит все колебания этой системы непременно будут либо симметричными,  $\hat{S} \mathbf{x}_s = +\mathbf{x}_s$ , либо антисимметричными,  $\hat{S} \mathbf{x}_a = -\mathbf{x}_a$ . Этим требованиям в данном случае достаточно для определения вида нормальных колебаний (рис. 39):

$$\mathbf{x}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} a_s \cos(\omega_s t + \varphi_s), \quad \mathbf{x}_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a_a \cos(\omega_a t + \varphi_a).$$

Предположим теперь, что точки  $A$  и  $B$  одновременно движутся по закону  $x_A = x_B = b \cos(\gamma t + \varphi)$ . Это значит, что на систему воздействует внешняя сила

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} k b \cos(\gamma t + \varphi).$$

Сила эта антисимметрична:  $\hat{S} \mathbf{F}(t) = -\mathbf{F}(t)$ , вектор силы направлен по  $\mathbf{x}_a$  и ортогонален  $\mathbf{x}_s$ . Поэтому данная сила не влияет на симметричное колебание и вызывает резонансную раскачку лишь антисимметричного колебания (при  $\gamma \rightarrow \omega_a$ ).

Более сложные и содержательные примеры, касающиеся колебаний молекул, изображенных на рис. 35–37, можно найти в [3, задачи 6.46, 6.48, 6.50а].

## Задачи

**24.1.** Найти нормальные координаты системы четырех одинаковых частиц на кольце (рис. 40). Указание: удобно воспользоваться свойствами симметрии и взаимной ортогональности нормальных колебаний.

**24.2.** Найти нормальные колебания системы четырех частиц на кольце (рис. 41).

## § 25. Колебания молекул

Молекула из  $N$  атомов имеет  $3N$  степеней свободы, соответствующих  $3N$  компонентам радиусов векторов атомов  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ . При нахождении нормальных колебаний молекулы следует исключить поступательное движение и вращение молекулы

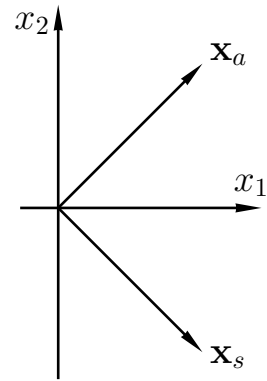


Рис. 39. Векторы нормальных колебаний системы, изображённой на рис. 38

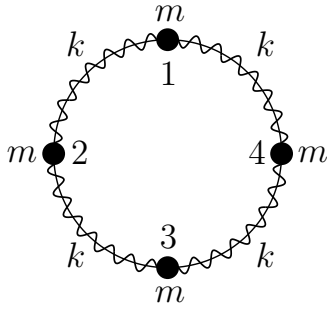


Рис. 40. К задаче 24.1

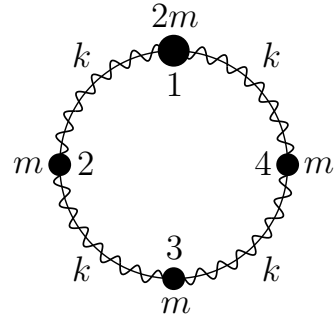


Рис. 41. К задаче 24.2

как целого<sup>12</sup>. Поступательное движение молекулы можно исключить, перейдя в систему центра инерции, в которой координаты атомов связаны условием

$$\sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}_a = 0, \quad (25.1)$$

где  $m_a$  — масса  $a$ -го атома. Пусть  $\mathbf{u}_a$  — смещение  $a$ -го атома из положения равновесия, определяемого радиусом вектором  $\mathbf{r}_{a0}$ , тогда

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_{a0} + \mathbf{u}_a, \quad \dot{\mathbf{r}}_a = \dot{\mathbf{u}}_a. \quad (25.2)$$

Поскольку в положении равновесия

$$\sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}_{a0} = 0,$$

то условие (1) перепишется в виде

$$\sum_{a=1}^N m_a \mathbf{u}_a = 0. \quad (25.3)$$

Это же условие можно получить, используя известные нам соотношения ортогональности нормальных колебаний (см. § 20). Малые колебания молекулы описываются функцией Лагранжа

$$L(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a \dot{\mathbf{u}}_a^2 - \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^N (\mathbf{u}_a, \hat{k}_{ab} \mathbf{u}_b), \quad (25.4)$$

где  $\hat{k}_{ab}$  — матрица жёсткостей. Среди решений уравнений Лагранжа

$$m_a \ddot{\mathbf{u}}_a + \sum_{b=1}^N \hat{k}_{ab} \mathbf{u}_b = 0 \quad (25.5)$$

<sup>12</sup> Движение электронов и ядер в молекуле определяется не классической, а квантовой механикой. Тем не менее, после усреднения по быстрому движению электронов можно в определенном приближении рассматривать колебательное движение ядер как классическое.

помимо решений

$$\mathbf{x}^{(\alpha)} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N), \quad (25.6)$$

отвечающих нормальным колебаниям с ненулевыми частотами  $\omega_\alpha$ , есть также решения с частотой  $\omega_0 = 0$ , отвечающие движению молекулы как целого со скоростью  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{x}^{(0)} = (\mathbf{V}t, \dots, \mathbf{V}t), \quad (25.7)$$

Соотношение ортогональности в метрике масс (20.5a) решений (6) и (7) имеют вид

$$\mathbf{V}t \cdot \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{u}_a = 0,$$

а из произвольности вектора  $\mathbf{V}$  как раз и следует условие (3).

Вращение молекулы как целого можно исключить, требуя, чтобы момент импульса молекулы был равен нулю. Проще, однако, получить решение уравнений (5), отвечающее малому повороту молекулы как целого на угол  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\Omega} \delta t$ :

$$\mathbf{x}^{(0)} = ([\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}_{10}], \dots, [\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}_{n0}]), \quad (25.8)$$

и снова использовать соотношение ортогональности (20.5a) для полученного решения и нормального колебания (6):

$$\sum_{a=1}^N [\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}_{a0}] \cdot m_a \mathbf{u}_a = 0$$

или

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \sum_{a=1}^N m_a [\mathbf{r}_{a0}, \mathbf{u}_a] = 0.$$

Отсюда в силу произвольности вектора  $\boldsymbol{\varepsilon}$  следует условие

$$\sum_{a=1}^N m_a [\mathbf{r}_{a0}, \mathbf{u}_a] = 0. \quad (25.9)$$

Для любых молекул, кроме линейных, два векторных условия (3) и (9) отвечают шести идеальным голономным связям, поэтому число нормальных колебаний таких молекул равно  $3N - 6$ . Для линейной молекулы, атомы которой расположены, скажем вдоль оси  $z$ , условие (9) приводит лишь к двум идеальным голономным связям для  $x$  и  $y$  компонент векторов  $\mathbf{u}_a$ , поэтому число нормальных колебаний линейной молекулы равно  $3N - 5$ .

## Задачи

**25.1.** Найти нормальные колебания линейной симметричной молекулы  $\text{CO}_2$  (см. рис. 35). Предполагается, что потенциальная энергия молекулы зависит только от расстояний  $\text{O}-\text{C}$  и  $\text{C}-\text{O}$  и от угла  $\text{OCO}$ .

**25.2.** Классифицировать собственные колебания молекулы этилена  $\text{C}_2\text{H}_4$  по их свойствам симметрии относительно осей  $AB$  и  $CD$  (см. рис. 36). В положении равновесия все атомы молекулы расположены в одной плоскости.

## § 26. Колебания линейных цепочек

В этом и следующем параграфах мы рассмотрим простые примеры цепочек частиц, соединённых пружинками. Это простейшие модели, используемые в теории твёрдого тела. Движение атомов в твёрдом теле описывается квантовой механикой. Однако, возникающие при решении задач о классических цепочках понятия оказываются весьма полезными и в квантовой теории. Электрические аналоги таких цепочек — искусственные линии, состоящие из конденсаторов и индуктивностей — находят применение в радиотехнике.

### 26.1. Уравнения движения и граничные условия

Пусть  $N$  одинаковых частиц массы  $m$  каждая соединены одинаковыми пружинками жёсткости  $k$  и находятся в равновесном состоянии на расстоянии  $l$  друг от друга, так что координата  $X_n = n \cdot l$ . Концы цепочки закреплены в точках  $A$  и  $B$  (рис. 42). Если длина пружинки в нерастянутом состоянии равна  $l_0$ , то натяжение

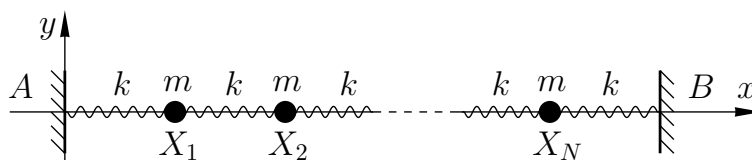


Рис. 42. Цепочка с закрепленными концами

каждой пружинки равно  $f = k(l - l_0)$ . Мы будем рассматривать малые колебания частиц только в направлении оси  $y$  (возможные при этом смещения в направлении оси  $x$  оказываются малыми второго порядка и ими можно пренебречь). Пусть  $y_n$  — смещение из положения равновесия  $n$ -й частицы вдоль оси  $y$ . Возвращающая сила,

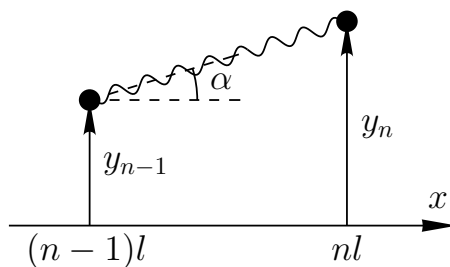


Рис. 43. К вычислению силы, действующей на  $n$ -ю частицу со стороны  $n$ -й пружинки

действующая на  $n$ -ю частицу со стороны  $n$ -й пружинки, равна

$$F_n = -f \sin \alpha = -f \frac{y_n - y_{n-1}}{l}$$

(рис. 43). В итоге функция Лагранжа для цепочки оказывается равной

$$L = \frac{m}{2} \sum_{n=1}^N \dot{y}_n^2 - \frac{f}{2l} \sum_{n=1}^{N+1} (y_n - y_{n-1})^2, \quad (26.1)$$

где для удобства записи потенциальной энергии мы ввели фиктивные смещения концов цепочки  $y_0$  и  $y_{N+1}$  и положили

$$y_0 \equiv 0, \quad y_N \equiv 0. \quad (26.2)$$

Уравнения Лагранжа имеют вид

$$\ddot{y}_n + \omega_0^2 (2y_n - y_{n-1} - y_{n+1}) = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{f}{ml}}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (26.3)$$

Решение задачи о колебаниях этой системы по общим правилам (см. § 19) было бы слишком громоздко. Удобнее воспользоваться другим приёмом. Из физических соображений можно предвидеть, что нормальными колебаниями должны быть стоячие волны. Удобно, однако, начать изучение системы уравнений (3), не обращая внимания на граничные условия (2) и считая число частиц неограниченным. Тогда система уравнений (3) описывает бесконечную цепочку, для которой легко найти решения в виде бегущих волн.

## 26.2. Бегущие волны

Будем искать гармонические решения для бесконечной цепочки в виде

$$y_n(t) = \text{Re} [e^{i\omega t} f(X_n)], \quad X_n = n \cdot l, \quad (26.4a)$$

где функция  $f(X_n)$  соответствует амплитуде колебаний  $n$ -й частицы. Так как при сдвиге на  $l$  вдоль оси  $x$  функция Лагранжа бесконечной цепочки не изменяется, можно надеяться, что функция

$$\text{Re} [e^{i\omega t} f(X_n + l)] \quad (26.4b)$$

также является гармоническим решением и потому  $f(X_n + l)$  отличается от  $f(X_n)$  лишь на постоянный множитель  $\lambda$ :

$$f(X_n + l) = \lambda f(X_n) \quad (26.5a)$$

и далее

$$f(X_n + l) = \lambda f(X_n) = \lambda^2 f(X_{n-1}) = \dots = \lambda^n f(X_1). \quad (26.5b)$$

Проверим, что такое предположение действительно позволяет получить решение задачи для бесконечной цепочки. Подставим (4a) в уравнение (3), тогда с учетом (5) система дифференциальных уравнений сведётся к одному алгебраическому уравнению

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 2 - \lambda - \frac{1}{\lambda} \right), \quad (26.6)$$

определяющему связь  $\omega$  и  $\lambda$ . Отсюда находим

$$\lambda_{1,2} = d \pm \sqrt{d^2 - 1}, \quad d = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2}.$$

Отметим, что  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ . При  $\omega < 2\omega_0$  величина  $d < 1$  и корни  $\lambda_{1,2}$  комплексно сопряжены:  $\lambda_1 = \lambda_2^*$  и  $|\lambda_{1,2}| = 1$ , такое решение, как мы увидим далее, соответствует

бегущим волнам. При  $\omega > 2\omega_0$  величина  $d^2 > 1$  и корни  $\lambda_{1,2}$  вещественны и отрицательны:  $\lambda_{1,2} < 0$  и  $|\lambda_1| > 1$ ,  $|\lambda_2| < 1$ , такое решение соответствует колебаниям, при которых амплитуды колебаний частиц возрастают (падают) вдоль цепочки.

При  $|\lambda| = 1$  величину  $\lambda$  можно представить в виде

$$\lambda = e^{\mp i\varphi}, \quad (26.7a)$$

поэтому

$$\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (26.8)$$

и

$$y_n = \text{Re} [Ae^{i(\omega t \mp n\varphi)}]. \quad (26.9a)$$

Введём обозначение  $K = \varphi/l$ , тогда

$$\lambda = e^{\mp iKl} \quad (26.7b)$$

и решениями являются бегущие по оси  $X$  или против оси  $X$  волны

$$y_n = \text{Re} [Ae^{i(\omega t \mp KX_n)}]. \quad (26.9b)$$

Частота  $\omega$  определяет период колебаний во времени  $T = 2\pi/\omega$ , аналогично, волновой вектор  $K$  определяет “период” колебаний в пространстве — длину волны

$$\Lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi l}{\varphi}. \quad (26.10)$$

Из (9) видно, что  $\varphi$  есть разность фаз колебаний соседних частиц. Уравнение (8) устанавливает связь частоты с этой разностью фаз (или с волновым вектором) — это так называемый *закон дисперсии*. Из него видно, что частоты бегущих по бесконечной цепочке волн лежат в интервале  $0 < \omega < 2\omega_0$ . Точка постоянной фазы  $\omega t \mp KX_n = \text{const}$  перемещается вдоль оси  $x$  по закону

$$X_n = \pm \frac{\omega}{K} t - \frac{\text{const}}{K}. \quad (26.11)$$

При  $\lambda < 0$  величину  $\lambda$  можно представить в виде

$$\lambda = -e^{\pm\psi} = -e^{\mp \varkappa l}, \quad \psi = \varkappa l, \quad (26.12)$$

поэтому

$$\omega^2 = 4\omega_0^2 \text{ch}^2 \frac{\psi}{2}, \quad (26.13)$$

В этом случае амплитуды колебаний падают (или возрастают) с ростом  $X_n$ :

$$y_n = \text{Re} [(-1)^n A e^{i\omega t \mp \varkappa X_n}] = \text{Re} [(-1)^n A e^{\mp n\psi} e^{i\omega t}]. \quad (26.14)$$

Из (13) видно, что частоты таких решений лежат в интервале  $\omega > 2\omega_0$ . Решения (13), (14) можно получить из (8), (9) при формальной замене

$$\varphi \rightarrow \pi - i\psi. \quad (26.15)$$



Итак, мы нашли два вида колебаний в бесконечной цепочке: (7), (8) и (13), (14). Бегущие волны (7), (8) мы используем в следующем разделе для получения свободных колебаний цепочки с закреплёнными концами, а решения (13), (14) понадобятся нам в § 28 при изучении вынужденных колебаний.

Есть еще одна характеристика — поток энергии вдоль цепочки, которая оказывается существенно разной для этих двух видов колебаний. Энергия, переданная от  $(n-1)$ -й частицы к  $n$ -й частице за время  $dt$ , равна работе силы  $F_n = -m\omega_0^2(y_n - y_{n-1})$ , действующей со стороны  $n$ -й пружинки, по перемещению  $n$ -й частицы на расстояние  $dy_n = \dot{y}_n dt$ :

$$dE = F_n dy_n = -m\omega_0^2(y_n - y_{n-1}) \dot{y}_n dt.$$

Поэтому поток энергии, переносимый волной вдоль оси  $X$ , равен

$$\frac{dE}{dt} = -m\omega_0^2(y_n - y_{n-1}) \dot{y}_n.$$

При усреднении по периоду колебаний поток энергии для решения в виде бегущей волны (9) равен

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \pm \frac{1}{2} m\omega_0^2 \omega |A|^2 \sin \varphi.$$

Для решения (14) усреднённый поток энергии равен нулю.

### 26.3. Стоячие волны и спектр

Возвратимся к задаче о цепочке с закреплёнными концами. Граничным условиям (2) можно удовлетворить, подбирая суперпозицию бегущих в обе стороны волн:

$$y_n = A_{(+)} e^{i(\omega t + n\varphi)} + A_{(-)} e^{i(\omega t - n\varphi)}.$$

Условие  $y_0 = 0$  дает  $A_{(-)} = -A_{(+)}$  или

$$y_n = \text{Re} [2iA_{(+)} \sin n\varphi e^{i\omega t}] = A \sin n\varphi \cos(\omega t + \chi), \quad 2iA_{(+)} = A e^{i\chi}, \quad (26.16)$$

т. е. стоячие волны, амплитуды которых синусоидально зависят от номера частицы  $n$ . Из условия на другом конце  $y_{N+1} = 0$  или

$$\sin(N+1)\varphi = 0$$

определяются возможные дискретные значения частот. Действительно, уравнение  $\sin(N+1)\varphi = 0$  приводит к  $N$  независимым решениям

$$\varphi_\alpha = \frac{\pi\alpha}{N+1}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N, \quad (26.17)$$

так как  $\alpha = 0$  и  $\alpha = N+1$  дают нулевые решения  $y_n = 0$ , а для  $\alpha = N+s$  фаза  $\varphi_{N+s} = 2\pi - \varphi_{N_s} + 2$ , т. е. решения с  $\alpha = N+s$  выражаются через решения с  $\alpha = N-s+2$ .

Из (8), (17) находим  $N$  различных частот (рис. 44):

$$\omega_\alpha = 2\omega_0 \sin \frac{\pi\alpha}{2(N+1)}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N. \quad (26.18)$$

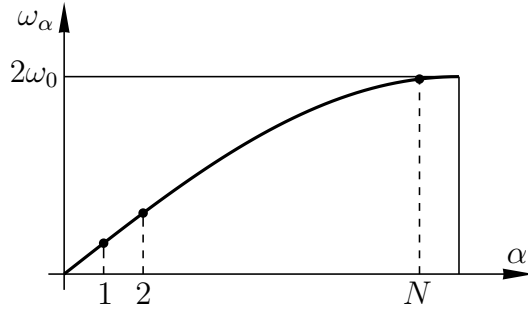


Рис. 44. Спектр частот для цепочки рис. 42

С ростом числа  $N$  число собственных частот увеличивается, но все они располагаются в интервале  $0 < \omega_\alpha < 2\omega_0$ . Этот интервал называют *разрешённой зоной* в отличие от *запрещённой зоны*  $\omega > 2\omega_0$ .

Вектор нормального колебания, отвечающего  $\alpha$ -ой частоте, имеет вид

$$\mathbf{y}^{(\alpha)} = \text{const} \cdot \begin{pmatrix} \sin \varphi_\alpha \\ \sin 2\varphi_\alpha \\ \vdots \\ \sin N\varphi_\alpha \end{pmatrix} Q_\alpha(t); \quad Q_\alpha(t) = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \chi_\alpha). \quad (26.19)$$

Фазе  $\varphi_\alpha$  соответствует длина волны (10)

$$\Lambda_\alpha = \frac{2\pi}{K_\alpha} = \frac{2\pi l}{\varphi_\alpha} = \frac{2L}{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N, \quad (26.20)$$

где  $L = l \cdot (N + 1)$  — полная длина цепочки, так что  $\alpha$ -е нормальное колебание соответствует такой стоячей волне, у которой на длине цепочки укладывается ровно  $\alpha$  полуволн.

Выберем в формуле (19)

$$\text{const} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{n=1}^N \sin^2 n\varphi_\alpha}} = \sqrt{\frac{2}{N+1}},$$

тогда различные нормальные колебания окажутся ортонормированными:

$$(\mathbf{y}^{(\alpha)}, \mathbf{y}^{(\beta)}) = \delta_{\alpha\beta} Q_\alpha^2.$$

Общее решение есть суперпозиция всех нормальных колебаний

$$y_n = \sum_{\alpha=1}^N U_{n\alpha} Q_\alpha(t), \quad U_{n\alpha} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{\pi n \alpha}{N+1}, \quad (26.21)$$

а лагранжиан (1) в переменных  $Q_\alpha$  имеет вид

$$L = \sum_{\alpha=1}^N L_\alpha; \quad L_\alpha = \frac{m}{2} \left( \dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2 \right), \quad (26.22)$$

отвечающий набору  $N$  различных невзаимодействующих осцилляторов.

В заключение рассмотрим цепочку из  $N$  одинаковых частиц массы  $m$ , связанных одинаковыми пружинками жёсткости  $k$  и могущих двигаться на этот раз только по прямой  $AB$  (рис. 40). Пусть  $x_n$  — смещение  $n$ -ой частицы из положения равновесия. Нетрудно убедиться, что уравнения Лагранжа для этой цепочки имеют вид (при дополнительных условиях  $x_0 = x_{N+1} \equiv 0$ )

$$\ddot{x}_n + \omega_0^2 (2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (26.23)$$

и совпадают с уравнениями (3) при замене  $y_n \rightarrow x_n$ .

## Задачи

**26.1.** Определить нормальные колебания системы  $N$  одинаковых частиц массы  $m$ , связанных одинаковыми пружинками жёсткости  $k$  и могущих двигаться по прямой (рис. 45) при условии, что один из концов свободен.

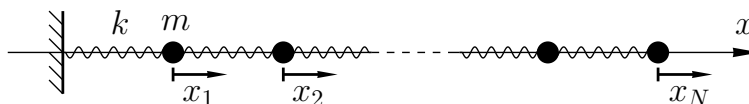


Рис. 45. Цепочка с одним свободным концом (к задаче 26.1)

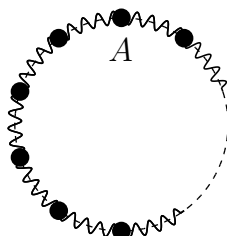


Рис. 46. Замкнутая цепочка на кольце (к задаче 26.2)

**26.2.** Найти свободные колебания  $N$  частиц, соединённых пружинками и могущих двигаться по кольцу (рис. 46). Массы всех частиц и жёсткости пружинок одинаковы. Пусть движение представляет собой бегущую по кольцу волну. Проверить, что поток энергии равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость.

## § 27. Акустические и оптические колебания линейных цепочек

Несколько более сложной оказывается задача о колебаниях цепочки, образованной чередующимися частицами с разными массами  $m$  и  $M$ . Число частиц равно  $2N$ . Частицы соединены одинаковыми пружинками жёсткости  $k$  и могут двигаться вдоль

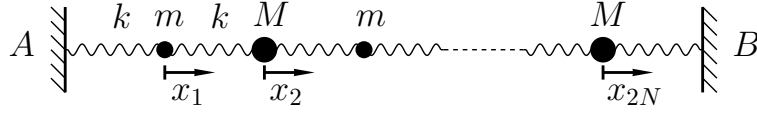


Рис. 47. Цепочка чередующихся частиц с массами  $m$  и  $M$

прямой  $AB$ , концы цепочки  $A$  и  $B$  закреплены (рис. 47). Пусть  $x_n$  — смещение  $n$ -й частицы из положения равновесия. Уравнения Лагранжа для этой цепочки имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_{2n-1} + k(2x_{2n-1} - x_{2n-2} - x_{2n}) &= 0, \\ M\ddot{x}_{2n} + k(2x_{2n} - x_{2n-1} - x_{2n+1}) &= 0, \end{aligned}$$

причём  $x_0 = x_{2N+1} \equiv 0$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . Решением этой системы уравнений являются стоячие волны разной амплитуды для лёгких и тяжёлых частиц:

$$\begin{aligned} x_{2n-1} &= A_\alpha \sin[(2n-1)\varphi_\alpha] \cos(\omega_\alpha t + \chi_\alpha), \\ x_{2n} &= B_\alpha \sin[2n\varphi_\alpha] \cos(\omega_\alpha t + \chi_\alpha), \end{aligned}$$

где

$$B_\alpha = \frac{2k - m\omega_\alpha^2}{2k \cos \varphi_\alpha} A_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N.$$

Собственные частоты этих колебаний определяются соотношениями

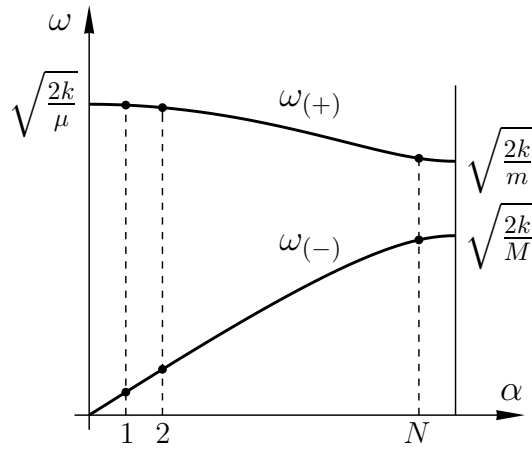


Рис. 48. Спектр частот для цепочки рис. 47

$$\omega_{(\mp)\alpha}^2 = \frac{k}{\mu} \left( 1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{mM} \sin^2 \varphi_\alpha} \right), \quad \mu = \frac{mM}{m+M}, \quad \varphi_\alpha = \frac{\pi\alpha}{2N+1}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N.$$

В этом случае выявляются два вида колебаний: так называемые *акустические*, соответствующие низким частотам  $\omega_{(-)\alpha}$  из интервала

$$0 < \omega_{(-)\alpha} < \sqrt{\frac{2k}{M}}, \quad (27.1)$$

и *оптические*, соответствующие высоким частотам  $\omega_{(+)\alpha}$  из интервала

$$\sqrt{\frac{2k}{m}} < \omega_{(+)\alpha} < \sqrt{\frac{2k}{\mu}}, \quad (27.2)$$

(рис. 48). Эти два интервала (1) и (2) образуют разрешённые зоны, разделённые запрещённой зоной

$$\sqrt{\frac{2k}{M}} < \omega < \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad (27.3)$$

(при  $m \ll M$  ширина запрещённой зоны оказывается большой). Область высоких частот

$$\omega > \sqrt{\frac{2k}{\mu}}$$

также представляет собой запрещённую зону.

Замечательно, что амплитуды  $A_{(-)\alpha}$  и  $B_{(-)\alpha}$ , отвечающие акустическим частотам, имеют одинаковые знаки (т. е. соседние частицы  $(2n-1)$ -я и  $(2n)$ -я с массами  $m$  и  $M$  колеблются в одну сторону), а  $A_{(+)\alpha}$  и  $B_{(+)\alpha}$  для оптических частот имеют противо-

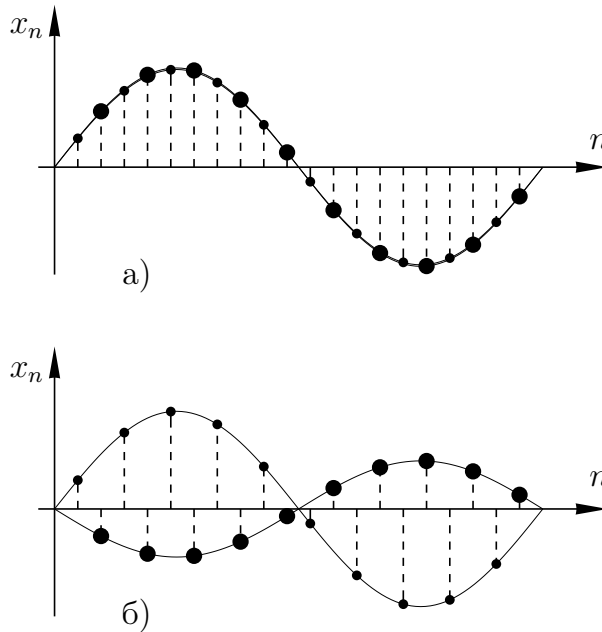


Рис. 49. Распределение амплитуд колебаний цепочки рис. 47 для случая  $N = 10$ ,  $\alpha = 2$ ,  $M = 2m$ : *а* — для акустических; *б* — для оптических колебаний

положные знаки (т. е. соседние частицы колеблются в противофазе). Распределение амплитуд колебаний для случая  $N = 10$ ,  $\alpha = 2$ ,  $M = 2m$  показано на рис. 49, где на оси ординат отложены номера частиц, а на оси абсцисс — соответствующие им амплитуды (рис. 49, *а* — для акустических и рис. 49, *б* — для оптических колебаний). Отметим, что для акустических колебаний амплитуды  $A_{(-)\alpha}$  и  $B_{(-)\alpha}$  различаются настолько мало, что практически укладываются на одну и ту же кривую на рис. 49, *а*.

## § 28. Вынужденные колебания линейных цепочек под действием гармонической силы

Рассмотрим вынужденные колебания цепочки рис. 40, возникающие в случае, если правый конец цепочки — точка  $B$  — колеблется по закону

$$y_B = b \cos(\gamma t + \chi)$$

вдоль оси  $y$ . Уравнения движения при этом имеют прежний вид (26.3), но вместо граничных условий (26.2) теперь будут условия

$$y_0 \equiv 0, \quad y_{N+1} = b \cos(\gamma t + \chi). \quad (28.1)$$

При  $\gamma < 2\omega_0$  (в разрешенной зоне) решение естественно искать в виде

$$y_n = B \sin n\varphi \cos(\gamma t + \chi), \quad (28.2)$$

аналогичном (26.14), так как такое решение удовлетворяет граничному условию  $y_0 = 0$  и уравнениям движения (26.3), если только фаза  $\varphi$  связана с известной частотой  $\gamma$  соотношением

$$\gamma^2 = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (28.3)$$

аналогичным (26.8). Чтобы удовлетворить условию на правом конце, необходимо

$$B \sin(N+1)\varphi = b,$$

что дает окончательный ответ для вынужденных колебаний:

$$y_n = b \frac{\sin n\varphi}{\sin(N+1)\varphi} \cos(\gamma t + \chi), \quad (28.4)$$

При  $\gamma \ll \omega_0$  из (3) имеем  $\varphi \approx \gamma/\omega_0 \ll 1$  и

$$y_n \approx n \frac{b}{N+1} \cos(\gamma t + \chi),$$

т. е. все частицы колеблются в фазе, а амплитуды колебаний линейно возрастают с ростом номера частицы. При  $\gamma \rightarrow \omega_\alpha$ , где  $\omega_\alpha$  — одна из собственных частот (26.18), непременно  $\varphi \rightarrow \varphi_\alpha = \pi\alpha/(N+1)$ , а амплитуды колебаний частиц возрастают до бесконечности, поскольку в знаменателе  $\sin(N+1)\varphi \rightarrow \sin(N+1)\varphi_\alpha = 0$ . Таким образом, в данной цепочке возникают резонансы на каждой из собственных частот.

При  $\gamma > 2\omega_0$  (в запрещенной зоне) решение естественно искать в виде суперпозиции решений типа (26.14):

$$y_n = (-1)^n (A e^{n\psi} + B e^{-n\psi}) \cos(\gamma t + \chi), \quad (28.5)$$

которая удовлетворяет уравнениям движения (26.3), если

$$\gamma^2 = 4\omega_0^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\psi}{2}. \quad (28.6)$$

Условие  $y_0 = 0$  дает  $A = -B$  или

$$y_n = (-1)^n 2A \operatorname{sh} n\psi \cos(\gamma t + \chi),$$

а из условия на другом конце

$$(-1)^{N+1} 2A \operatorname{sh}(N+1)\psi = b$$

находим

$$y_n = (-1)^{N+1-n} b \frac{\operatorname{sh} n\psi}{\operatorname{sh}(N+1)\psi} \cos(\gamma t + \chi). \quad (28.7)$$

Конечно, это решение можно было бы получить прямо из решения (4) при замене (26.15). Амплитуды колебаний убывают к левому концу цепочки, каждая частица колеблется в противофазе с соседними частицами. При  $\gamma \gg 2\omega_0$  имеем  $\gamma \approx \omega_0 e^{-\psi}$  и

$$y_n = \frac{b}{(-\gamma^2/\omega_0^2)^{N+1-n}} \cos(\gamma t + \chi), \quad (28.8)$$

т. е. амплитуды колебаний убывают экспоненциально к левому концу цепочки. С учетом (21.4a) этот результат вполне естественен. Действительно, при  $\gamma \gg 2\omega_0$  (а значит, и  $\gamma \gg \omega_\alpha$ ) крайняя правая частица колеблется с малой амплитудой и в противофазе с вынужденной силой, а  $(N-1)$ -я частица в первом приближении покоится. Затем можно движение  $(N-1)$ -й частицы рассматривать как вынужденное колебание, вызванное вынуждающей силой большой частоты со стороны  $N$ -ой частицы и т. д.

Заметим, что применяемые в радиотехнике длинные цепочки из конденсаторов и индуктивностей, описываются такими же уравнениями, как и рассмотренные выше механические цепочки. С точки зрения радиотехники обсуждаемые цепочки могут рассматриваться как полосовые фильтры, которые хорошо передают энергию от одного конца цепочки к другому в области разрешенных частот и плохо — в области запрещенных.

## § 29. Нелинейные колебания. Ангармонические поправки

С ростом амплитуды колебаний оказываются существенными отклонения потенциальной энергии от квадратичного приближения и колебания становятся *нелинейными*. Физика нелинейных колебаний представляет собой обширную область механики. Мы рассмотрим в этом курсе только несколько характерных явлений в этой быстро развивающейся области.

### 29.1. Одномерные нелинейные колебания

Рассмотрим простейшие особенности нелинейных колебаний на примере одномерного движения в потенциальном поле. Учтем поправки в потенциальной энергии третьего и четвертого порядков малости по отклонению от положения равновесия и запишем функцию Лагранжа в виде

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} - \frac{m\alpha x^3}{3} - \frac{m\beta x^4}{4},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные, которые предполагаются малыми. Коэффициенты записаны в таком виде только для того, чтобы уравнение движения выглядело просто:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3, \quad (29.1)$$

где  $\omega_0^2 = k/m$ . Решение этого уравнения является периодической функцией времени с периодом  $T = 2\pi/\omega$ , зависящим от энергии. Хотя точное решение (см. (1.4)) и может быть выражено через эллиптические функции, полезным оказывается приближенное решение, справедливое при малых амплитудах колебаний. Чтобы его получить воспользуемся тем, что решение, как периодическая функция времени, может быть записано в виде ряда Фурье:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega t. \quad (29.2)$$

Коэффициенты разложения  $a_n$  и частота  $\omega$  могут быть найдены из уравнений движения при заданной энергии, а начало отсчета времени выбрано так, что при  $t = 0$  отклонение  $x$  экстремально. Удобно, однако, считать независимо задаваемым параметром не энергию, а амплитуду основной гармоники

$$a_1 \equiv a,$$

а остальные амплитуды и частоту выражать через нее. Разность

$$\delta\omega = \omega - \omega_0$$

зависит от амплитуды  $a$  и называется *нелинейным сдвигом частоты*.

Если подставить решение в виде бесконечного ряда Фурье в уравнение и выразить все степени косинуса в его правой части через более высокие гармоники, то, приравнявая коэффициенты в правой и левой частях уравнения при одинаковых гармониках, мы получим бесконечную систему нелинейных уравнений, в каждое из которых входило бы бесконечное число неизвестных коэффициентов  $a_n$  и неизвестная частота  $\omega$ .

Естественно ожидать, что при малой нелинейности решение мало отличается от гармонических колебаний. Будем искать приближенное решение этой системы *методом последовательных приближений*. В этом методе решение нелинейной задачи сводится к последовательному вычислению поправок все более высокого порядка по  $a$ . Ограничимся вычислением смещения  $x$  до третьего порядка по  $a$  включительно и сдвига частоты до второго порядка по  $a$ . В качестве первого приближения берем гармонические колебания:

$$x^{(1)} = a \cos \omega t$$

с неизвестной частотой  $\omega$ , которая мало отличается от  $\omega_0$  и будет находиться из последующих приближений.

Для получения второго приближения подставляем  $x^{(1)}$  с неизвестной частотой в малую правую часть уравнения (1) и выражаем степени косинуса через косинусы гармоник:

$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega t, \quad \cos^3 \omega t = \frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t.$$



Уравнение приобретает вид уравнения с заданной вынуждающей силой, содержащей все гармоники до третьей включительно:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{1}{2} \alpha a^2 (1 + \cos 2\omega t) - \frac{1}{4} \beta a^3 (3 \cos \omega t + \cos 3\omega t) .$$

Ищем его частное решение в виде суммы гармоник по третью включительно

$$x^{(2)}(t) = a_0^{(2)} + a \cos \omega t + a_2^{(2)} \cos 2\omega t + a_3^{(2)} \cos 3\omega t .$$

Выписывая условия равенства коэффициентов при одинаковых гармониках в правой и левой частях уравнения, получаем:

$$\omega_0^2 a_0^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2} , \quad (29.3)$$

$$(\omega^2 - \omega_0^2) a = \frac{3}{4} \beta a^3 , \quad (29.4)$$

$$(4\omega^2 - \omega_0^2) a_2^{(2)} = \frac{1}{2} \alpha a^2 , \quad (29.5)$$

$$(9\omega^2 - \omega_0^2) a_3^{(2)} = \frac{1}{4} \beta a^3 . \quad (29.6)$$

В уравнение (4) входит только неизвестная частота  $\omega$ . Считая нелинейный сдвиг частоты малым, так что  $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\omega_0(\omega - \omega_0)$ , находим

$$\delta\omega^{(2)} = \omega - \omega_0 = \frac{3\beta a^2}{8\omega_0} .$$

Амплитуды гармоник находим из уравнений (3), (5) и (6), пренебрегая различием частот  $\omega_0$  и  $\omega$ :

$$a_0^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2}, \quad a_2^{(2)} = \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}, \quad a_3^{(2)} = \frac{\beta a^3}{32\omega_0^2} . \quad (29.7)$$

Таким образом, во втором приближении мы получили амплитуды нулевой и второй гармоники и поправку к частоте во втором порядке по  $a$  и амплитуду третьей гармоники в третьем порядке по  $a$ .

Теперь второе приближение можно подставить в нелинейную часть уравнения, получить третье приближение и, продолжая так, будем находить амплитуды все более высоких гармоник, которые будут иметь все более высокие порядки малости по  $a$ . Важно, однако, что в третьем приближении появятся новые поправки третьего порядка по  $a$  и их надо учесть. Действительно, при подстановке второго приближения в квадратичный член уравнения, появятся члены пропорциональные  $a_0^{(2)} a \cos \omega t$  и  $a_2^{(2)} a \cos 2\omega t \cos \omega t$ , порядка  $a^3$ , учет которых изменит равенства (4), (6) и приведет к еще одной поправке в частоте

$$\delta\omega^{(3)} = -\frac{5\alpha^2 a^2}{12\omega_0^3}$$

и добавке к амплитуде третьей гармоники

$$a_3^{(3)} = \frac{\alpha^2 a^3}{48\omega_0^4} .$$

Легко убедиться, что еще одна итерация не меняет поправок второго и третьего порядков по  $a$ . Окончательно имеем с учетом всех поправок второго и третьего порядка по  $a$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos \omega t - \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} (3 - \cos 2\omega t) + \frac{a^3}{16\omega_0^2} \left( \frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} + \frac{\beta}{2} \right) \cos 3\omega t, \\ \delta\omega &= \left( \frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3} \right) a^2. \end{aligned} \quad (29.8)$$

Уточним теперь условия применимости полученных формул. Из требования малости амплитуд гармоник по сравнению с  $a$  и малости поправки к частоте по сравнению с  $\omega_0$  получим, что должны выполняться неравенства

$$\frac{\alpha a}{\omega_0^2} \ll 1, \quad \frac{\beta a^2}{\omega_0^2} \ll 1. \quad (29.9)$$

## 29.2. Многомерные нелинейные колебания. Комбинационные частоты

Итак, в одномерном случае в первом (линейном) приближении мы получили гармонические колебания на основной частоте, а при учёте нелинейности (во втором приближении) — смещение равновесия и колебания на удвоенной частоте. При проведении подобной программы для многомерных колебаний в первом приближении мы также получим колебания, отвечающие первым гармоникам с частотами  $\omega_1, \dots, \omega_\alpha, \dots, \omega_\beta, \dots, \omega_s$ . Однако уже во втором приближении возникнут принципиально новые явления — колебания с так называемыми *комбинационными частотами*  $|\omega_\alpha \pm \omega_\beta|$ .

Для иллюстрации того, как возникают нелинейные поправки в многомерном случае и к каким результатам они приводят, рассмотрим простой пример маятника массы  $m$  на пружинке жесткости  $k$  в поле тяжести  $g$  (рис. 50). Мы будем рассматривать лишь колебания этого маятника в вертикальной плоскости и примем, что длина ненапряжённой пружинки равна  $l_0$ . В положении равновесия длина пружинки равна  $l = l_0 + (mg/k)$ . В качестве обобщенных координат выберем декартовы координаты  $x$  и  $y$  отклонения маятника от положения равновесия. Функцию Лагранжа маятника

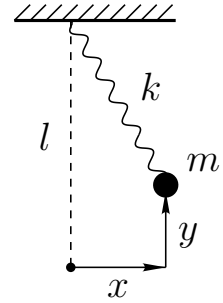


Рис. 50. Маятник на пружинке

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{2} \left[ \sqrt{(l-y)^2 + x^2} - l_0 \right]^2 - mgy$$

разложим в ряд по малым отклонениям до третьего порядка включительно:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 - \omega_x^2 x^2 + \dot{y}^2 - \omega_y^2 y^2 + 2\alpha x^2 y), \quad (29.10)$$

где введены обозначения

$$\omega_x = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_y = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \alpha = \frac{kl_0}{2ml^2}.$$

Решение уравнений движения

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega_x^2 x &= 2\alpha xy, \\ \ddot{y} + \omega_y^2 y &= \alpha x^2\end{aligned}$$

ищем методом последовательных приближений

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + \dots, \quad y = y^{(1)} + y^{(2)} + \dots$$

В качестве первого приближения получаем гармонические колебания с частотами  $\omega_x$  и  $\omega_y$ :

$$x^{(1)} = a \cos(\omega_x t + \varphi_x), \quad y^{(1)} = b \cos(\omega_y t + \varphi_y). \quad (29.11)$$

Во втором порядке получаем из первого уравнения

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_x^2 x^{(2)} = 2\alpha x^{(1)} y^{(1)} = \alpha ab [\cos(\omega_+ t + \varphi_+) + \cos(\omega_- t + \varphi_-)],$$

где

$$\omega_{\pm} = \omega_y \pm \omega_x, \quad \varphi_{\pm} = \varphi_y \pm \varphi_x.$$

Решение этого уравнения представляет собой гармонические колебания с комбинационными частотами  $\omega_{\pm}$ :

$$x^{(2)} = \frac{\alpha ab}{2\omega_y(2\omega_x + \omega_y)} \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + \frac{\alpha ab}{2\omega_y(2\omega_x - \omega_y)} \cos(\omega_- t + \varphi_-). \quad (29.12)$$

Подобным же образом из второго уравнения получаем

$$y^{(2)} = \frac{\alpha a^2}{2\omega_y^2} - \frac{\alpha a^2}{2(4\omega_x^2 - \omega_y^2)} \cos(2\omega_x t + 2\varphi_x), \quad (29.13)$$

т. е. у  $y$  во втором порядке появился постоянный сдвиг и колебание с удвоенной частотой  $2\omega_x$ .

Полученные решения справедливы, пока частота  $\omega_y$  не близка к  $2\omega_x$ . При  $\omega_y = 2\omega_x$  ангармонические поправки перестают быть малыми и могут приводить к значительной перекачке энергии из  $x$  в  $y$  колебания и обратно. Этот случай, имеющий отношение к связи продольных и изгибных колебаний молекулы  $\text{CO}_2$  (так называемый *резонанс Ферми*) и к удвоению частоты света в нелинейной оптике, рассмотрен, например, в [3, задача 8.10].

## § 30. Нелинейные резонансы

Задача об отклике гармонического осциллятора на периодическое внешнее воздействие решается точно и приводит к представлению о резонансе как резком возрастании амплитуды вынужденных колебаний при частоте внешней силы близкой к частоте собственных колебаний осциллятора. Как мы уже знаем, учет нелинейной зависимости возвращающей силы от отклонения от положения равновесия приводит к двум качественно новым эффектам, проявляющимся уже в собственных колебаниях нелинейного осциллятора: появлению высших гармоник и нелинейному сдвигу

частоты. Учет нелинейности уравнений движения изменяет и явление резонанса. Выясним, в чем состоят эти изменения.

Эта задача точно не решается и мы будем искать приближенное решение методом последовательных приближений, как и в § 29. Добавим в уравнение для нелинейного осциллятора (29.1) внешнюю периодическую силу  $f(t) = f \cos \gamma t$  и слабое трение  $f_{\text{тр}} = -2m\lambda\dot{x}$ :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3 - 2\lambda\dot{x}. \quad (30.1)$$

Зная, что в линейном осцилляторе установившееся решение имеет частоту внешней силы, но сдвинутую фазу:  $x = b \cos(\gamma t + \delta)$ , будем искать решение для ангармонических вынужденных колебаний в виде

$$x = b_0 + b \cos(\gamma t + \delta) + b_2 \cos 2(\gamma t + \delta) + b_3 \cos 3(\gamma t + \delta) + \dots \quad (30.2)$$

Как и при вычислении искажений для свободных колебаний нелинейного осциллятора без трения, следует подставить решение в виде ряда (2) в уравнение (1) и выполнить две итерации последовательных приближений. В задаче о свободных колебаниях нелинейного осциллятора амплитуда  $a$  была задана и мы вычисляли амплитуды гармоник и сдвиг частоты колебаний. В задаче о вынужденных колебаниях, заданы частота  $\gamma$  и амплитуда  $f$  внешней силы, а требуется определить амплитуду  $b$  основной гармоники (амплитуды остальных гармоник могут быть найдены способом, повторяющим использованный ранее, и даются теми же формулами, что и ранее с заменой  $\omega_0$  на  $\gamma$ ). Амплитуда основной гармоники  $b$  и сдвиг фазы  $\delta$  находятся из уравнения, которое получается при приравнении вкладов, соответствующих колебаниям на основной частоте

$$(-\gamma^2 + \omega^2) b \cos(\gamma t + \delta) - 2\lambda\gamma b \sin(\gamma t + \delta) = \frac{f}{m} \cos \gamma t, \quad (30.3)$$

где  $\omega = \omega_0 + \delta\omega$  и  $\delta\omega$  — нелинейный сдвиг частоты собственных колебаний (29.8), пропорциональный квадрату амплитуды. Далее будем писать

$$\omega = \omega_0 + \varkappa b^2, \quad \varkappa = \frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}. \quad (30.4)$$

Подставив

$$\cos \gamma t = \cos(\gamma t + \delta - \delta) = \cos(\gamma t + \delta) \cos \delta + \sin(\gamma t + \delta) \sin \delta$$

в правую часть уравнения (3) и приравняв коэффициенты при  $\cos(\gamma t + \delta)$  и  $\sin(\gamma t + \delta)$  в правой и левой частях полученного уравнения, найдём

$$(\omega^2 - \gamma^2) b = \frac{f}{m} \cos \delta, \quad -2\lambda\gamma b = \frac{f}{m} \sin \delta.$$

Отсюда можно найти  $b$  и  $\delta$ . Уравнение для определения  $b$  отличается от соответствующего уравнения (22.4) в линейном случае лишь заменой

$$\omega_0^2 \rightarrow \omega^2 = (\omega_0 + \varkappa b^2)^2 \approx \omega_0^2 + 2\varkappa\omega_0 b^2 \quad (30.5)$$

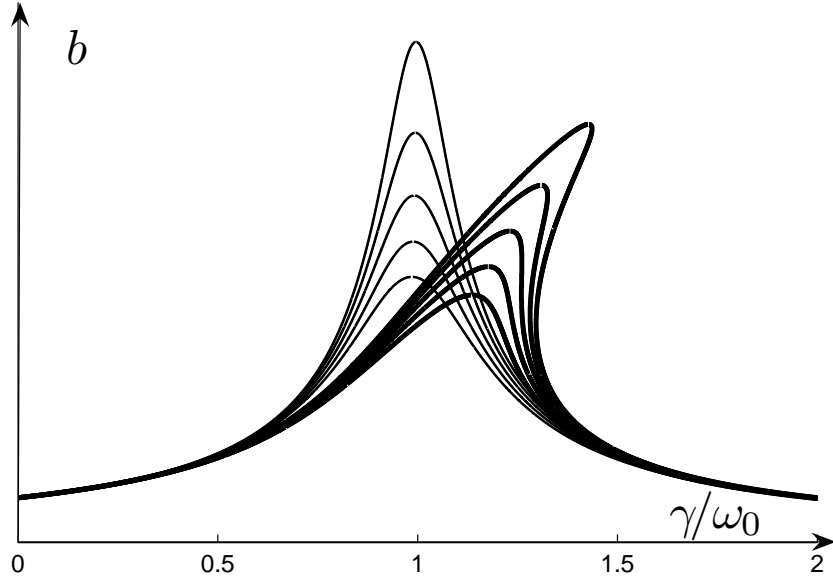


Рис. 51. Зависимость амплитуды линейных (тонкие кривые) и нелинейных (жирные кривые) колебаний  $b$  от частоты вынуждающей силы  $\gamma$  для различных значений коэффициента затухания  $\lambda$

и представляет собой уравнение третьей степени по  $b^2$ :

$$b^2 \left[ (\omega_0^2 + 2\kappa\omega_0 b^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2 \right] = \frac{f^2}{m^2}. \quad (30.6)$$

Положение максимума кривой  $b(\gamma)$  и его величина формально определяются соотношениями (22.5) и (22.6) с заменой (5). Поэтому при положительном  $\kappa$  можно ожидать, что по сравнению с линейным случаем положение максимума нелинейного резонанса сместится направо, а его величина уменьшится (при отрицательном  $\kappa$  положение максимума нелинейного резонанса сместится налево, а его величина увеличится). Зависимость  $b(\gamma)$  для разных значений  $\lambda$  при фиксированном положительном значении  $\kappa$  изображена на рис. 51 жирными линиями, для сравнения тонкие линии изображают кривые для тех же значений  $\lambda$  при  $\kappa = 0$ . Видно, что с уменьшением  $\lambda$  не только происходит смещение максимума кривых, но появляются перегибы и возникает область значений  $\gamma$ , в которой данной частоте внешней силы отвечает три разных значения амплитуды  $b(\gamma)$ .

Рассмотрим подробнее окрестность резонанса в случае слабого трения  $\lambda \ll \omega_0$ . Обозначая расстройку частоты

$$\epsilon = \gamma - \omega_0$$

и используя приближенные соотношения (22.8), получаем

$$b^2 [(\epsilon - \kappa b^2)^2 + \lambda^2] = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2}. \quad (30.7)$$

Это уравнение является кубическим относительно  $b^2$ , а относительно  $\epsilon$  — квадратным. При каждом  $b < b_{\max} \approx f/(2m\omega_0\lambda)$  имеется два значения  $\epsilon$ :

$$\epsilon = \kappa b^2 \pm \sqrt{\left(\frac{f}{2m\omega_0 b}\right)^2 - \lambda^2}. \quad (30.8)$$

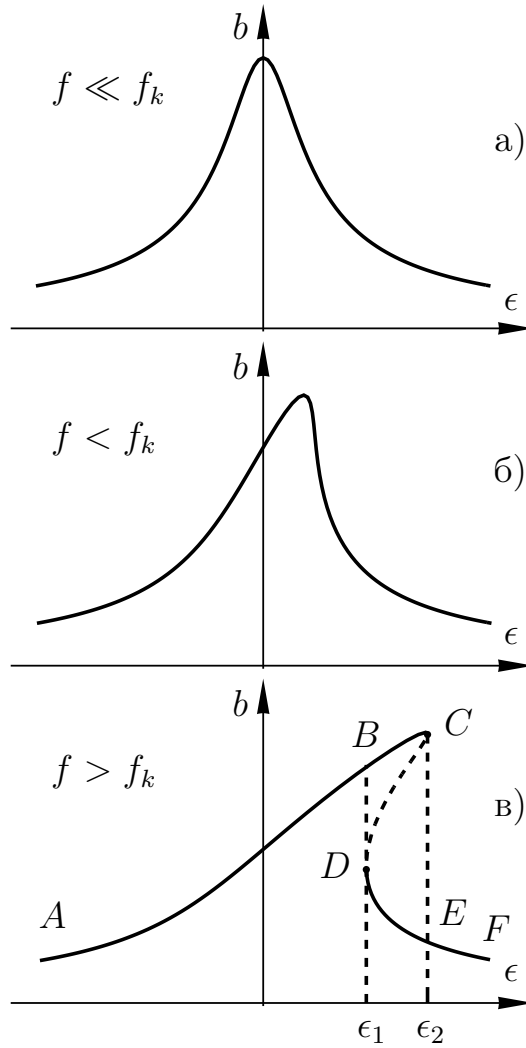


Рис. 52. Зависимость амплитуды нелинейных колебаний  $b$  от расстройки частоты вынуждающей силы  $\epsilon = \gamma - \omega_0$  для различных значений параметра нелинейности  $\varkappa$

В отсутствие нелинейности ( $\varkappa = 0$ ), резонансная кривая совпадает с полученной в линейном случае (рис. 52, а). Легко представить, как она деформируется с ростом  $\varkappa$  при постоянной амплитуде силы  $f$ . Будем считать  $\varkappa > 0$ . Максимальная амплитуда колебаний осталась приблизительно такой же, как и в линейном случае. По сравнению с линейным случаем каждая пара точек, соответствующая заданной амплитуде  $b$ , смещена вправо по оси  $\epsilon$  на  $\varkappa b^2$  (рис. 52, б), при этом наибольшее смещение испытывает точка, соответствующая  $b_{\max}$ . Поэтому с ростом  $\varkappa$  на правой ветви резонансной кривой  $b(\epsilon)$  касательная станет вертикальной в некоторой точке. Одновременно это будет точка перегиба. Качественно новым резонанс становится при еще больших  $\varkappa$ . Теперь имеется интервал значений  $\epsilon_1 < \epsilon < \epsilon_2$ , внутри которого заданному значению  $\epsilon$  соответствует три значения амплитуды колебаний (рис. 52, в). Найдём критическое значение  $\varkappa_k$ , при котором происходит переход к этой качественно новой зависимости. Приравняв нулю первую и вторую производные функции  $\epsilon(b^2)$  из уравнения (8) по  $b^2$ , найдём, что касательная будет вертикальной в точке перегиба с координатой

$b^2 = 2\lambda/(\sqrt{3}\varkappa)$  при условии

$$\varkappa = \varkappa_k \equiv \frac{32}{3\sqrt{3}} \frac{m^2 \omega_0^2 \lambda^3}{f^2}. \quad (30.9)$$

(Заметим, что при отрицательном  $\varkappa$  максимум резонанса сдвигается влево и “опрокидывание” резонансной кривой происходит при  $\varkappa < -\varkappa_k$ .) Если рассматривать изменение резонансной кривой  $b(\epsilon)$  с ростом амплитуды внешней силы  $f$  при постоянном значении  $\varkappa$ , то “опрокидывание” резонансной кривой произойдёт при

$$f > f_k = \sqrt{\frac{32}{3\sqrt{3}} \frac{m^2 \omega_0^2 \lambda^3}{|\varkappa|}}. \quad (30.10)$$

Проследим теперь за изменением амплитуды колебаний при медленном (адиабатическом) изменении  $\epsilon$  для резонансной кривой  $ABCDEF$ , изображенной на рис. 52, в. При возрастании  $\epsilon$  из области отрицательных значений, амплитуда колебаний меняется по ветви  $ABC$ , а в точке  $C$  скачком уменьшается до значения, соответствующего точке  $E$  на нижней ветви  $DEF$  (“срыв” колебаний). При уменьшении  $\epsilon$  из области положительных значений, амплитуда колебаний меняется по линии  $FED$  и скачком возрастает до значения, соответствующего точке  $B$  на резонансной кривой (“жесткое возбуждение” колебаний). Таким образом, амплитуда колебаний в интервале  $\epsilon_1 < \epsilon < \epsilon_2$  может иметь два разных значения в зависимости от предыстории системы. Можно показать, что колебания соответствующие ветвям  $ABC$  и  $FED$  устойчивые, а соответствующие ветви  $CD$  — неустойчивые.

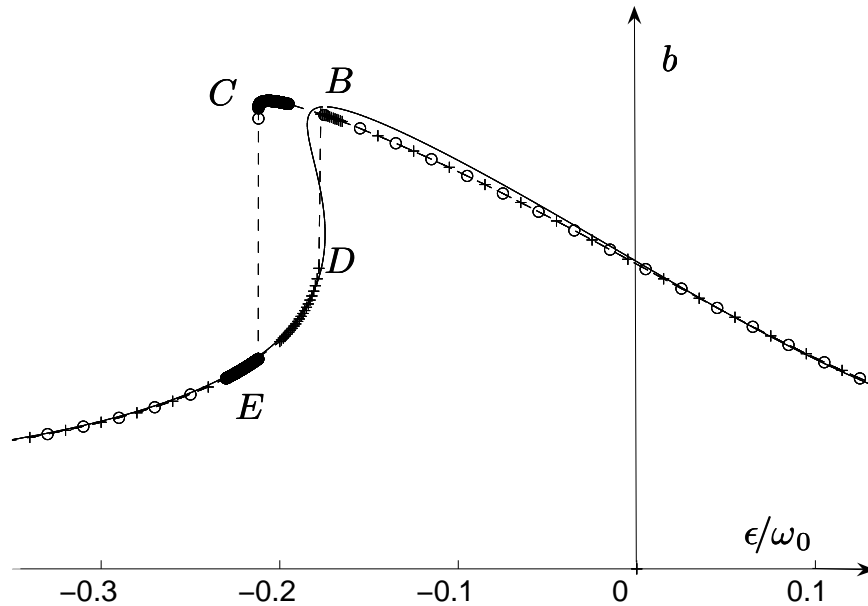


Рис. 53. Результаты численных расчетов уравнения (1). Значками “+” отмечены величины амплитуды установившихся колебаний при возрастании частоты внешней силы  $\gamma$ , значками “o” — при ее уменьшении. В окрестности скачков шаг изменения частоты уменьшен

На рис. 53 приведённые выше результаты приближённых аналитических вычислений сопоставляются с численными расчётами движения согласно уравнению (1).

Для расчётов выбрана потенциальная энергия математического маятника длины  $l$  при малых углах отклонения  $\varphi = x/l$ :

$$U = mgl(1 - \cos \varphi) \approx mgl \left( \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{24}\varphi^4 \right) = \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2 + \frac{m}{4}\beta x^4.$$

Были приняты значения

$$\alpha = 0, \quad \beta = -\frac{\omega_0^2}{6l^3}, \quad \lambda = 0,095\omega_0, \quad f = 0,26m\omega_0^2 l.$$

Кривая, полученная путем аналитических расчетов по формуле (7), показана сплошной линией. Отрицательному значению  $\beta$  отвечает уменьшение частоты свободных колебаний маятника с ростом амплитуды, поэтому максимум кривой лежит при отрицательном значении  $\epsilon$ . Крестиками показаны амплитуды установившихся колебаний, полученные в результате численного решения уравнений (1) при увеличении частоты внешней силы очень малыми шагами. Ноликами — амплитуды, полученные таким же образом при уменьшении частоты. При изменении частоты вынуждающей силы весьма существенно было, чтобы фаза этой силы изменялась без скачков. Именно это обеспечило “прохождение” вдоль резонансной кривой как в сторону увеличения частоты, так и в сторону уменьшения, поскольку установившиеся значения амплитуды и фазы колебаний  $x(t)$  с изменением частоты изменяются мало.

В результате наблюдались скачки, описанные выше. Видно также отличие результатов численного расчёта от “предсказаний” аналитических вычислений (7). Объяснение этого расхождения в том, что при аналитических вычислениях не были учтены вклады высших гармоник, пренебрегать которыми при  $x \sim l$  не совсем корректно.

## § 31. Параметрический резонанс

Вспомним, как можно раскачивать качели. Самый простой способ — подталкивать их в такт раскачиванию. В терминах механики это есть использование резонансной внешней силы. Второй способ состоит в том, чтобы в определенные моменты приседать и выпрямляться. Хорошо известно, что для раскачивания нужно вставать, когда качели находятся в самом нижнем положении, и приседать, когда они максимально отклонены, так что частота приседаний оказывается вдвое больше частоты колебаний. В терминах механики это есть использование резонансного изменения параметра системы — эффективной длины качелей, а само явление называется *параметрическим резонансом*.

Качели с периодически приседающим человеком — это маятник массы  $m$  с периодически меняющейся длиной  $l(t)$ . Используя в качестве координаты угол отклонения от вертикали, который обозначим  $x$ , получаем функцию Лагранжа для малых колебаний (ср. (12.8))

$$L = \frac{ml^2(t)}{2} \dot{x}^2 - \frac{mgl(t)}{2} x^2$$

и уравнение движения

$$\frac{d}{dt} \left[ l^2(t) \frac{dx}{dt} \right] + gl(t)x = 0.$$



Переходя к новому “времени”  $t'$  по правилу  $dt' = dt/l^2(t)$ , вводя обозначение  $\omega^2(t') = gl^3(t)$  и опуская далее знак штриха, получаем уравнение в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(t) x = 0, \quad (31.1)$$

где частота  $\omega(t)$  меняется периодически по времени.

В качестве математической модели раскачивающихся качелей возьмем уравнение (1) с параметром  $\omega^2(t)$ , зависящим от времени по гармоническому закону:

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h \cos \gamma t). \quad (31.2)$$

Соответствующее уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2(1 + h \cos \gamma t) x = 0, \quad (31.3)$$

называется *уравнением Матвё*. Наиболее эффективно качели раскачиваются, если вставлять при каждом прохождении минимума, что соответствует примерно выполнению равенств  $\gamma \approx 2\omega_0$ .

Выясним условия, при которых существует нарастающее решение уравнений (3), предполагая, что постоянная  $h \ll 1$ . Рассмотрим подробнее параметрический резонанс при  $\gamma = 2\omega_0 + \epsilon$ , где отстройка  $\epsilon$  предполагается малой  $|\epsilon| \ll \omega_0$ . Представим вначале уравнение (3) в эквивалентном виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = h\omega_0^2 x \cos \gamma t. \quad (31.4)$$

Теперь будем строить его приближенное решение пользуясь малостью  $h$ . Если в начальный момент имеется отличное от нуля собственное колебание (например,  $x = a \cos \omega_0 t$ ), то правую часть уравнения (4) запишем в виде, соответствующем вынуждающей внешней силе:

$$h\omega_0^2 x \cos \gamma t = \frac{1}{2} h\omega_0^2 a [\cos(\omega_0 + \epsilon)t + \cos(3\omega_0 + \epsilon)t].$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства можно понимать как резонансную силу (а второе, содержащее третью гармонику, можно отбросить). Это приведет к медленному (в силу малости  $h$ ) росту амплитуды колебаний.

Будем искать решение в виде

$$x(t) = a(t) \cos(\gamma t/2) + b(t) \sin(\gamma t/2),$$

где  $a(t)$  и  $b(t)$  — медленно изменяющиеся функции времени. Подставляя это выражение в уравнение (4), сохраним лишь резонансные слагаемые в правой части, а в левой части пренебрежем малыми вторыми производными  $\ddot{a}$  и  $\ddot{b}$  по сравнению с первыми. В итоге получим систему уравнений

$$\begin{aligned} 4\dot{a} + (2\epsilon + h\omega_0) b &= 0, \\ 4\dot{b} + (2\epsilon - h\omega_0) a &= 0. \end{aligned}$$

Если  $|\epsilon| < h\omega_0/2$ , то решение этой системы экспоненциально растет со временем

$$\begin{aligned} a(t) &= \alpha_1 (C_1 e^{-st} + C_2 e^{st}), \\ b(t) &= \alpha_2 (C_1 e^{-st} - C_2 e^{st}), \end{aligned}$$

где

$$s = \frac{1}{4} \sqrt{(h\omega_0)^2 - 4\epsilon^2}, \quad \alpha_{1,2} = \sqrt{h\omega_0 \pm 2\epsilon}. \quad (31.5)$$

Решение, отвечающее параметрическому резонансу, имеет вид

$$x(t) = C e^{st} \cos\left(\frac{\gamma}{2}t - \varphi\right) + D e^{-st} \cos\left(\frac{\gamma}{2}t + \varphi\right), \quad (31.6)$$

где  $\operatorname{tg} \varphi = \alpha_1/\alpha_2$  (рис. 54).

Таким образом, колебания, вообще говоря, неограниченно возрастают. Скорость их роста, характеризуемая величиной  $s$ , действительно, мала.

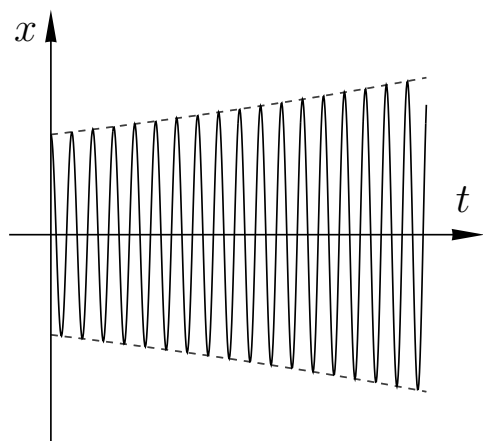


Рис. 54. Параметрический резонанс

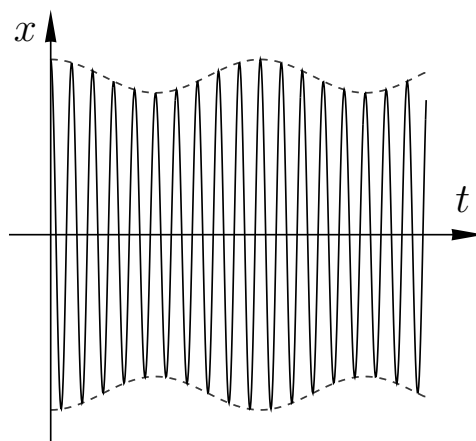


Рис. 55. Биения

Если же  $|\epsilon| > h\omega_0/2$ , то величина  $s = \pm(i/4) \sqrt{4\epsilon^2 - (h\omega_0)^2}$  и амплитуда колебаний не растет, а медленно осциллирует с течением времени (рис. 55).

До сих пор мы изучали основной параметрический резонанс на частоте  $\gamma \approx 2\omega_0$ . В рассматриваемом примере раскачивания качелей это соответствует тому, что приседать в верхнем положении качелей и вставать в их нижнем положении было необходимо дважды за один период колебания самих качелей. Ясно, однако, что раскачать качели можно и в том случае, если приседать и вставать только один раз за тот же период или за два периода колебания качелей и т. д. Иными словами, параметрический резонанс может происходить и на частоте  $\gamma \approx \omega_0/n$  при  $n \geq 1$ , правда с меньшей эффективностью, чем на основной частоте  $\gamma \approx 2\omega_0$  (т. е. в более высоких порядках по  $h$ ).

При учете трения вместо уравнения (3) получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2(1 + h \cos \gamma t)x + 2\lambda \frac{dx}{dt} = 0. \quad (31.7)$$

Решение этого уравнения, возрастающее со временем, имеет вид (6) с

$$s = \frac{1}{4} \sqrt{(h\omega_0)^2 - 4\epsilon^2} - \lambda. \quad (31.8)$$

В отличие от случая без трения, параметрическая раскачка начинается лишь при  $h > 4\lambda/\omega_0$ .

В реальных условиях возрастание амплитуды колебаний прекращается, например, если становится существенной роль ангармонических поправок (см. [3, задача 8.7]) или обратное влияние колебаний на устройство, периодически изменяющее частоту.

Более детальный и математически последовательный разбор этого круга вопросов можно найти в Дополнении С.

## § 32. Движение в быстро осциллирующем поле

Как известно, у обычного плоского маятника имеется два положения равновесия: нижнее устойчивое и верхнее неустойчивое. П. Л. Капица обнаружил, что если точку подвеса маятника привести в колебательное движение в вертикальном направлении с высокой частотой, то частота медленных колебаний в нижнем положении изменится, а верхнее положение может стать устойчивым. Для объяснения этого явления детали, связанные с устройством маятника несущественны, а важно только, что уравнение его движения может быть записано в виде

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} + f(x) \cos \omega t, \quad (32.1)$$

где частота внешней силы  $\omega$  много больших характерных частот движения в поле  $U$  при отсутствии внешней силы. При таком разделении частот, естественно пытаться искать решение в виде  $x(t) = X(t) + \xi(t)$ , где считается, что  $X(t)$  медленное среднее движение, на которое наложено высокочастотное дрожание с малой амплитудой  $\xi(t) = \xi_0 \cos \omega t$ . Малость амплитуды  $\xi_0$ , позволяет разложить по ней силу в ряд Тейлора и преобразовать уравнение к виду

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -\frac{dU(X)}{dX} + f(X) \cos \omega t - \frac{d^2U(X)}{dX^2} \xi + \frac{df(X)}{dX} \xi \cos \omega t, \quad (32.2)$$

Расщепим это уравнение на два: высокочастотное и низкочастотное.

Сначала получим высокочастотное уравнение. В правой части уравнения (2) с высокой частотой изменяются второе и четвертое слагаемые. Поскольку ожидается, — и мы это сейчас увидим, — что амплитуда  $\xi_0$  мала, последним слагаемым, как имеющим второй порядок малости по амплитуде, пренебрегаем и получаем уравнение

$$m\ddot{\xi} = f(X) \cos \omega t. \quad (32.3)$$

Его общее решение содержит медленно меняющееся решение однородного уравнения, которым пренебрегаем, и оставляем быстро осциллирующее частное решение неоднородного уравнения, которое находим, считая медленную координату  $X(t)$  постоянной

$$\xi_0 = -\frac{f(X)}{m\omega^2}. \quad (32.4)$$

Уравнение для медленной переменной получаем усредняя уравнение (2) за период высокочастотных колебаний. Средние от линейных по  $\xi$ ,  $f$  слагаемых в левой и правой частях равны нулю. Среднее от последнего слагаемого нулю не равно и даёт эффективную добавку к силе:

$$m\ddot{X} = -\frac{dU}{dX} - \frac{1}{2m\omega^2} \frac{df(X)}{dX} f(X). \quad (32.5)$$

Записывая правую часть этого уравнения в виде  $-dU_{\text{эф}}/dX$ , где

$$U_{\text{эф}} = U + \frac{f^2}{4m\omega^2}, \quad (32.6)$$

видим, что усреднённое движение происходит так, будто кроме исходного поля  $U$  действует дополнительное поле, пропорциональное квадрату амплитуды высокочастотной силы. Это дополнительное поле выталкивает частицу в ту область, где амплитуда силы меньше.

Аналогичный результат имеет место и для случая трехмерного движения.

Рассмотренный в этом примере способ решения задач, связанный с разделением быстрых и медленных движений, широко применяется в различных задачах механики.

## Задача

**32.1.** Вычислить эффективное поле для маятника, точка подвеса которого колеблется вертикально с амплитудой  $a$ , и найти, при каком условии верхнее положение становится устойчивым.

# Глава IV

## ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА

### § 33. Уравнения Гамильтона

Для системы с  $s$  степенями свободы имеется  $s$  уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (33.1)$$

причем это дифференциальные уравнения второго порядка, содержащие  $\ddot{q}_i$ ,  $\dot{q}_i$  и  $q_i$ . Обобщенные импульсы определяются соотношениями

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (33.2)$$

и в силу (1) для них справедливо уравнение

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (33.3)$$

Соотношения (2) и (3) показывают возможность перейти от уравнений второго порядка (1) к уравнениям первого порядка для новых переменных  $q_i$  и  $p_i$ . Действительно, так как лагранжиан есть функция обобщённых координат, скоростей и времени  $L = L(q, \dot{q}, t)$ , то соотношения (2) и (3) можно разрешить относительно  $\dot{q}_i$  и  $\dot{p}_i$ :

$$\dot{q}_i = f_i(q, p, t), \quad \dot{p}_i = g_i(q, p, t), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (33.4)$$

т. е. представить в виде системы  $2s$  уравнений первого порядка относительно переменных  $q_i, p_i$ .

#### 33.1. Функция Гамильтона. Уравнения Гамильтона

Способ получения явного вида функций  $f_i$  и  $g_i$  заключается в следующем. Полный дифференциал функции Лагранжа

$$dL(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

перепишем, используя (2), (3) в виде

$$dL(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^s (\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (33.5)$$

Отсюда легко получить, что для функции

$$H(p, q, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - L \quad (33.6)$$

полный дифференциал равен

$$dH(p, q, t) = \sum_{i=1}^s (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (33.7)$$

Выражение (6), рассматриваемое как функция обобщённых координат, импульсов и времени, называется *функцией Гамильтона или гамильтонианом*. Напомним, что та же величина, рассматриваемая как функция времени при движении системы, является энергией  $E(t)$  (см. § 13).

Выражая дифференциал  $H$  через частные производные, немедленно получаем искомые уравнения — *уравнения Гамильтона* или *канонические уравнения*:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(p, q, t)}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (33.8)$$

и равенство

$$\frac{\partial H(p, q, t)}{\partial t} = -\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial t}.$$

Отметим, что здесь частная производная по времени от функции Гамильтона берется при постоянных координатах и импульсах, а от функции Лагранжа — при постоянных координатах и скоростях.

В отличие от уравнений Лагранжа (1), уравнения Гамильтона (8) являются уравнениями первого порядка, их  $2s$  штук и они содержат  $2s$  неизвестных  $q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s$  и их первые производные по времени. Для аналитического решения в случае простых систем лагранжеев подход часто оказывается более удобным, чем гамильтонов. Однако во многих случаях, когда необходим общий подход, например в статистической физике, предпочтительным оказывается гамильтонов формализм. Особую ценность гамильтоновой механике придает наличие в ней более широкого (чем в лагранжеевой механике) класса преобразований, относительно которого уравнения Гамильтона ковариантны (см. § 36). Упомянем, наконец, что переход от классической механики к квантовой механике наиболее естественно происходит именно в рамках гамильтонова формализма.

Приведем примеры гамильтонианов для разных систем.

**Пример 1.** Пусть функция Лагранжа

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 + b(q)\dot{q} + c(q)$$

(ср. (13.6)), тогда величина (6) равна

$$p\dot{q} - L = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - c(q).$$

Но эта величина станет функцией Гамильтона только после того, как обобщённая скорость  $\dot{q}$  в ней будет выражена через обобщённый импульс, равный

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = a(q)\dot{q} + b(q),$$

и обобщённую координату

$$\dot{q} = \frac{p - b(q)}{a(q)}.$$

В итоге функция Гамильтона равна

$$H(p, q) = \frac{[p - b(q)]^2}{2a(q)} - c(q). \quad (33.9)$$

В частности, для гармонического осциллятора функция Лагранжа

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

имеет обсуждаемую структуру и потому функция Гамильтона равна

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2}.$$

**Пример 2.** Для частицы в центральном поле функция Лагранжа в сферических координатах дается формулой (8.8), функция Гамильтона равна

$$H(p_r, p_\theta, p_\varphi, r, \theta, \varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + U(r). \quad (33.10)$$

**Пример 3.** Для нерелятивистской частицы в электромагнитном поле лагранжиан и энергия даны в (10.4) и (13.8); с учетом (10.5) имеем

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2 + e\varphi(\mathbf{r}, t). \quad (33.11)$$

**Пример 4.** В релятивистском случае (см. (11.1) и (11.3))

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \sqrt{\left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2 c^2 + m^2 c^4} + e\varphi(\mathbf{r}, t). \quad (33.12)$$

**Пример 5.** Фотон (квант света) — это релятивистская частица с массой  $m = 0$  и зарядом  $e = 0$ . Согласно предыдущему примеру, его функция Гамильтона для движения в вакууме равна

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = c|\mathbf{p}|.$$

Распространение света в прозрачной изотропной среде с показателем преломления  $n(\mathbf{r})$  в приближении геометрической оптики определяется функцией Гамильтона (см. [9, § 85])

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{c}{n(\mathbf{r})} |\mathbf{p}|. \quad (33.12a)$$

Уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{c}{n} \frac{\mathbf{p}}{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{cp}{n^2} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}, \quad p = |\mathbf{p}|.$$

Фактически в геометрической оптике “частицей” является волновой пакет,  $\mathbf{r}(t)$  есть закон именно его движения,  $\dot{\mathbf{r}}$  — это групповая скорость, а вектор  $\mathbf{p}$ , перпендикулярный к волновому фронту, определяет волновой вектор электромагнитной волны.

### 33.2. Интегралы движения в гамильтоновом подходе

1. Простейший способ находить интегралы движения в гамильтоновом подходе аналогичен использованию циклических координат в лагранжевом подходе (см. § 13). Если функция Гамильтона не зависит от какой-либо обобщённой координаты,

$$\frac{\partial H(p, q, t)}{\partial q_k} = 0,$$

то соответствующий обобщённый импульс сохраняется:

$$p_k = \text{const}.$$

Если функция Гамильтона не зависит от какого-либо обобщённого импульса, то сохраняется соответствующая обобщённая координата.

2. Рассмотрим вопрос о том, как при движении системы изменяется функция Гамильтона. Из (7) с учетом уравнений движения (8) получаем

$$\frac{dH(p, q, t)}{dt} = \sum_{i=1}^s \left( \dot{q}_i \frac{dp_i}{dt} - \dot{p}_i \frac{dq_i}{dt} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (33.13)$$

Таким образом, если функция Гамильтона не зависит от времени явно,

$$\frac{\partial H(p, q, t)}{\partial t} = 0,$$

то энергия сохраняется

$$E(t) = H(p(t), q(t)) = \text{const}.$$

**Пример 1.** В качестве примера рассмотрим подробнее решение уравнений Гамильтона для частицы в постоянном однородном магнитном поле<sup>13</sup>. Направим ось  $z$  вдоль магнитного поля  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  и выберем векторный потенциал в форме

$$\mathbf{A} = (0, xB, 0). \quad (33.14)$$

Гамильтониан

$$H(p_x, p_y, p_z, x, y, z, t) = \frac{1}{2m} \left[ p_x^2 + \left( p_y - \frac{e}{c} Bx \right)^2 + p_z^2 \right] \quad (33.15)$$

не зависит от  $t, y, z$ , поэтому интегралами движения являются энергия и компоненты импульса  $p_y$  и  $p_z$ :

$$p_y = m\dot{y} + \frac{eB}{c} x = \text{const}, \quad p_z = m\dot{z} = \text{const}.$$

Видно, что движение вдоль оси  $z$  равномерное:

$$z = \frac{p_z}{m} t + z_0. \quad (33.16)$$

<sup>13</sup>Закон движения в этом случае нам хорошо известен, мы рассмотрим именно подход к решению задачи с помощью уравнений Гамильтона. Это будет полезно в квантовой механике.



Обозначим

$$\omega = \frac{eB}{mc}, \quad x_0 = \frac{cp_y}{eB} = \frac{p_y}{m\omega}, \quad (33.17)$$

тогда гамильтониан

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x - x_0)^2 + \frac{p_z^2}{2m} \quad (33.18)$$

совпадает с гамильтонианом гармонического осциллятора (см. пример 1 в предыдущем разделе), движущегося в направлении оси  $x$ , с центром колебаний в точке  $x_0$  (надо иметь в виду, что величины  $x_0$  и  $p_z$  постоянны). Поэтому мы можем записать сразу же, не выписывая уравнений движения,

$$x = x_0 + R \cos \omega(t - t_0), \quad p_x = m\dot{x} = -m\omega R \sin \omega(t - t_0), \quad (33.19)$$

где  $R$ ,  $t_0$  — постоянные интегрирования. Из уравнения

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = m\omega^2(x_0 - x) \frac{\partial x_0}{\partial p_y} = -\omega R \cos \omega(t - t_0),$$

находим зависимость  $y(t)$ :

$$y = y_0 - R \sin \omega(t - t_0). \quad (33.20)$$

Таким образом, частица движется вдоль оси  $z$  с постоянной скоростью  $p_z/m$  и вращается с угловой скоростью  $\omega$  в плоскости  $xy$ . При  $\omega > 0$  вращение происходит по часовой стрелке по окружности радиуса  $R$  с центром в точке с координатами  $(x_0, y_0)$ .

Отметим, что обобщённый импульс  $p_y$  имеет (с точностью до множителя  $m\omega$ ) смысл  $x$ -координаты центра орбиты частицы в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля. При другом выборе векторного потенциала смысл обобщённых импульсов окажется другим.

3. Пусть функция Гамильтона зависит от переменных  $q_1$  и  $p_1$  лишь через посредство функции  $f(q_1, p_1)$ , т. е.

$$H = H(f(q_1, p_1), q_2, p_2, \dots, q_s, p_s), \quad (33.21)$$

тогда  $f(q_1, p_1)$  есть интеграл движения.

Действительно,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial f}{\partial p_1} \dot{p}_1$$

и, используя уравнения Гамильтона в форме

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial H}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{\partial H}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial q_1},$$

получаем  $df/dt = 0$ . Отсюда следует

$$f(q_1, p_1) = \text{const}. \quad (33.22)$$

Очевидно обобщение этого результата: если функция Гамильтона имеет вид

$$H = H(f(q_1, p_1, \dots, q_k, p_k), q_{k+1}, p_{k+1}, \dots, q_s, p_s), \quad (33.23)$$

то  $f(q_1, p_1, \dots, q_k, p_k)$  есть интеграл движения.

**Пример 2.** Движение частицы в поле диполя (14.11). В сферических координатах с осью  $z$ , направленной вдоль оси диполя гамильтониан имеет вид (ср. (33.10))

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2mr^2} f(\theta, p_\theta, \varphi, p_\varphi), \quad f = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} + 2ma \cos \theta.$$

Согласно предыдущему, функция  $f$  есть интеграл движения, с учетом (8.9) его можно переписать в виде

$$f = \mathbf{M}^2 + 2ma \cos \theta. \quad (33.24)$$

Кроме того, в данной задаче интегралами движения являются энергия  $E$ , обобщенный импульс  $p_\varphi$  и величина (14.13).

## Задачи

**33.1.** Определить функцию Гамильтона ангармонического осциллятора, функция Лагранжа которого

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2} - \alpha x^3 + \beta x \dot{x}^2.$$

**33.2.** Найти функцию Лагранжа, если функция Гамильтона равна

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mathbf{p}\mathbf{a},$$

где  $\mathbf{a}$  — постоянный вектор.

**33.3.** Найти закон движения частицы, функция Гамильтона которой

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} + \lambda \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right)^2.$$

**33.4.** Найти сечение падения частиц в центр поля

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{a}\mathbf{r}}{r^3},$$

где  $\mathbf{a}$  — постоянный вектор. Скорость частиц на бесконечности составляет угол  $\alpha$  с вектором  $\mathbf{a}$ .

## § 34. Вариационный принцип для уравнений Гамильтона

Уравнения Лагранжа можно получить из принципа наименьшего действия (см. § 9). Уравнения Гамильтона также можно получить как уравнения Эйлера некоторой вариационной задачи.

Образум функцию

$$\Lambda(q, p, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - H(p, q, t), \quad (34.1)$$

в которой  $q_i$  и  $p_i$  будем рассматривать как независимые переменные, так что их вариации  $\delta q_i$  и  $\delta p_i$  также считаются независимыми. Обратим внимание на то, что функция  $\Lambda(q, p, \dot{q}, t)$  не зависит от  $\dot{p}$ . Пусть система частиц в момент времени  $t_1$  находится в точке  $A(q_1^{(1)}, \dots, q_s^{(1)})$ , а в момент времени  $t_2$  — в точке  $B(q_1^{(2)}, \dots, q_s^{(2)})$ . При этом предполагается, что вариации координат в точках  $A$  и  $B$  равны нулю<sup>14</sup>

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (34.2)$$

Тогда можно утверждать, что движение системы между этими двумя точками происходит по такому закону  $q_i(t)$ ,  $p_i(t)$ , чтобы при подстановке этих функций  $q_i(t)$ ,  $p_i(t)$  в интеграл

$$\Sigma = \int_{t_1}^{t_2} \Lambda(q, p, \dot{q}, t) dt \quad (34.3)$$

он принимал экстремальное значение, т. е. чтобы вариация  $\delta \Sigma = 0$ . Действительно, так как

$$\delta \Sigma = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s \left[ \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial \Lambda}{\partial p_i} \delta p_i \right] dt + \sum_{i=1}^s \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}, \quad (34.4)$$

то с учетом граничных условий (2) и независимости вариаций координат и импульсов получаем уравнения Эйлера этой вариационной задачи

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial p_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (34.5)$$

Они совпадают с уравнениями Гамильтона, так как

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_i} = p_i, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial p_i} = \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (34.6)$$

Сравним вариационный принцип  $\delta \Sigma = 0$  и принцип наименьшего действия  $\delta S = 0$  (см. § 9). Если определять зависимость  $p_i(t)$  из уравнений  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ , то функция  $\Lambda$  совпадает с функцией Лагранжа, а  $\Sigma$  — с действием  $S$ . В действительности же, в вариационном принципе  $\delta \Sigma = 0$  импульсы являются независимыми переменными (как и координаты) и независимыми являются также вариации  $\delta q_i$  и  $\delta p_i$ . Иными словами класс “допущенных к конкурсу” функций  $p_i(t)$  для принципа  $\delta \Sigma = 0$  является гораздо более широким, чем в принципе наименьшего действия  $\delta S = 0$ , для которого вариации  $\delta p_i(t)$  полностью определяются через вариации координат и их производных по времени.

## § 35. Скобки Пуассона

Пусть функция Гамильтона  $H(p, q, t)$  задана. Вычислим полную производную по времени от произвольной функции координат, импульсов и времени  $f(q, p, t)$ . Дифференцируя  $f$  по времени как сложную функцию и выражая  $\dot{q}_i, \dot{p}_i$  из уравнений Гамильтона, получаем

$$\frac{df(q, p, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right). \quad (35.1)$$

<sup>14</sup>Вариации обобщённых импульсов в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  могут быть произвольными.

Билинейная комбинация частных производных, возникшая в уравнении (1), как мы увидим далее, постоянно встречается и играет важную роль в исследовании задач гамильтоновой механики. Это было обнаружено Пуассоном, который ввел для неё специальное обозначение.

### 35.1. Определение и основные свойства

Пусть  $f = f(q, p, t)$  и  $g = g(q, p, t)$  — произвольные функции обобщённых координат, импульсов и времени. Скобка Пуассона  $\{f, g\}$  определяется следующим образом:

$$\{f, g\} \equiv \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right). \quad (35.2)$$

Скобки Пуассона обладают рядом легко проверяемых с помощью определения (2) свойств:

$$\begin{aligned} \{f, c\} &= 0, \quad \text{если } c = \text{const}, \\ \{f, g\} &= -\{g, f\}, \\ \{f_1 + f_2, g\} &= \{f_1, g\} + \{f_2, g\}, \\ \{f_1 f_2, g\} &= f_1 \{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2, \\ \frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}, \\ \{p_i, f\} &= \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \{q_i, f\} = -\frac{\partial f}{\partial p_i}, \\ \{p_i, p_j\} &= \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Пользуясь этими свойствами можно вычислять значение скобок Пуассона не обращаясь к их определению, по крайней мере для полиномиальных функций  $f$  и  $g$ .

Теперь уравнение (1) можно переписать в виде

$$\frac{df(q, p, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}, \quad (35.3)$$

и, в частности, сами уравнения Гамильтона (33.8) записать единообразным способом:

$$\dot{q}_i = \{H, q_i\}, \quad \dot{p}_i = \{H, p_i\}. \quad (35.4)$$

С помощью скобок Пуассона можно даже получить общее решение уравнений Гамильтона, правда, только формально в виде ряда по степеням времени, прошедшего с начала движения (см. [3, задача 10.23]).

**Пример.** Рассмотрим скобки Пуассона для компонент скорости частицы в магнитном поле и для координат центра орбиты. Пусть магнитное поле задано векторным потенциалом  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ . Согласно (10.5) компоненты скорости

$$v_i = \frac{p_i}{m} - \frac{e}{mc} A_i, \quad (35.4)$$

поэтому

$$\{v_i, v_j\} = -\frac{e}{m^2 c} (\{p_i, A_j\} + \{A_i, p_j\}) = -\frac{e}{m^2 c} \left( \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{e}{m^2 c} \sum_{k=1}^3 e_{ijk} B_k,$$

где  $\mathbf{V} = \text{rot}\mathbf{A}$  — магнитное поле, а  $e_{ijk}$  — полностью антисимметричный единичный тензор третьего ранга.

Будем считать далее магнитное поле однородным и постоянным и рассматривать только движение частицы в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Выберем ось  $z$  вдоль вектора  $\mathbf{V}$ . Тогда отлична от нуля скобка Пуассона

$$\{v_x, v_y\} = -\frac{eB_z}{m^2c} = -\frac{\omega}{m}, \quad \omega = \frac{eB}{mc}. \quad (35.5)$$

Частица движется по окружности с центром в точке  $(x_0, y_0)$  с угловой скоростью  $\omega = -(e/mc)\mathbf{V}$  (см. (33.16)–(33.20)), при этом

$$x_0 = x - \frac{v_y}{\omega}, \quad y_0 = y + \frac{v_x}{\omega}. \quad (35.6)$$

Учитывая, что  $\{mv_i, x_j\} = \delta_{ij}$ , находим скобку Пуассона для координат центра орбиты:

$$\{x_0, y_0\} = \frac{1}{m\omega}. \quad (35.7)$$

## 35.2. Тождество Якоби и теорема Пуассона

Для любых трёх функций координат и импульсов  $f(q, p)$ ,  $g(q, p)$ ,  $h(q, p)$  справедливо соотношение

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0, \quad (35.8)$$

называемое *тождеством Якоби*.

Для доказательства удобно использовать следующий формальный приём. Положим, что  $h(q, p)$  есть “гамильтониан” некоторой воображаемой механической системы. Фактически это предположение означает всего лишь, что развитие  $q_i$  и  $p_i$  в зависимости от воображаемого “времени”  $\tau$  (никак не связанного с реальным временем  $t$ ) определяется “каноническими уравнениями”

$$\frac{dq_i}{d\tau} = \frac{\partial h}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial h}{\partial q_i}, \quad (35.9)$$

из которых можно найти  $q_i$  и  $p_i$  как функции  $\tau$ , а значит, и  $f(q(\tau), p(\tau))$  и  $g(q(\tau), p(\tau))$  как функции  $\tau$ . При этом в согласии с (3)

$$\frac{df}{d\tau} = \{h, f\}, \quad \frac{dg}{d\tau} = \{h, g\}, \quad \frac{d\{f, g\}}{d\tau} = \{h, \{f, g\}\}. \quad (35.10)$$

Используя далее свойства скобок Пуассона, найходим

$$\frac{d\{f, g\}}{d\tau} = \left\{ \frac{df}{d\tau}, g \right\} + \left\{ f, \frac{dg}{d\tau} \right\}. \quad (35.11)$$

Подставляя в это соотношение формулы (10), получаем тождество Якоби (8).

Тождество Якоби (8) остаётся справедливым и в том случае, если функции  $f, g, h$  имеют также явную зависимость от времени (т. е. если  $f = f(q, p, t)$ ,  $g = g(q, p, t)$ ,  $h = h(q, p, t)$ ). В этом случае время  $t$  является параметром, не имеющим отношения к вычислению частных производных по переменным  $p$  и  $q$ .

Более прямой (но и более громоздкий) способ доказательства тождества Якоби приведен, например, в [1, § 41].

*Теорема Пуассона.* Пусть механическая система имеет два интеграла движения  $f(q, p, t)$  и  $g(q, p, t)$ . Тогда скобка Пуассона  $h = \{f, g\}$  также является интегралом движения этой системы.

Действительно, из условий

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0, \quad \frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \{H, g\} = 0,$$

тождества Якоби (8) и свойств скобок Пуассона сразу же следует равенство

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \{H, h\} = 0.$$

В качестве примера рассмотрим интегралы движения для частицы в поле изотропного трёхмерного осциллятора  $U(r) = kr^2/2$ . Как известно (см. § 4), в таком поле сохраняется момент импульса

$$\mathbf{M} = (0, 0, M), \quad M = xp_y - yp_x$$

и энергии колебаний по осям  $x$  и  $y$ :

$$E_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}, \quad E_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{ky^2}{2}.$$

Согласно теореме Пуассона, интегралом движения является величина

$$N = \{E_x, M\} = \frac{p_x p_y}{m} + kxy,$$

что уже было отмечено ранее (см. уравнение (4.7)), а также величина  $\{E_y, M\} = -N$ . Повторное применение теоремы Пуассона не приводит к новым интегралам движения, так

$$\{E_x, N\} = -\{E_y, N\} = -\frac{k}{m} M.$$

## Задачи

**35.1.** Вычислить скобки Пуассона:

- а)  $\{M_i, x_j\}$ ,  $\{M_i, p_j\}$ ,  $\{M_i, M_j\}$ ;
- б)  $\{\mathbf{a}\mathbf{p}, \mathbf{b}\mathbf{r}\}$ ,  $\{\mathbf{a}\mathbf{M}, \mathbf{b}\mathbf{r}\}$ ,  $\{\mathbf{a}\mathbf{M}, \mathbf{b}\mathbf{M}\}$ ;
- в)  $\{\mathbf{M}, \mathbf{r}\mathbf{p}\}$ ,  $\{\mathbf{p}, r^n\}$ ,  $\{\mathbf{p}, (\mathbf{a}\mathbf{r})^2\}$ .

Здесь  $x_i, p_i, M_i$  — декартовы компоненты векторов,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  — постоянные векторы.

**35.2.** Показать, что:

а)  $\{M_z, \varphi\} = 0$ , где  $\varphi$  — любая скалярная функция координат и импульсов частицы  $\varphi = \varphi(\mathbf{r}^2, \mathbf{p}^2, (\mathbf{r}\mathbf{p}))$ ;

б)  $\{M_z, \mathbf{f}\} = [\mathbf{n}, \mathbf{f}]$ , где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении оси  $z$ , а  $\mathbf{f}$  — векторная функция координат и импульсов частицы, т. е.  $\mathbf{f} = \mathbf{r}\varphi_1 + \mathbf{p}\varphi_2 + [\mathbf{r}, \mathbf{p}]\varphi_3$  и  $\varphi_i = \varphi_i(\mathbf{r}^2, \mathbf{p}^2, (\mathbf{r}\mathbf{p}))$ .

## § 36. Канонические преобразования

Одна из привлекательных черт лагранжева формализма — ковариантность уравнений Лагранжа относительно преобразований обобщённых координат, т. е. перехода от одних обобщённых координат  $q_i$  к любым другим  $Q_i$ :

$$q_i = q_i(Q, t), \quad i = 1, \dots, s$$

(конечно, при этом требуется, чтобы преобразование было невырожденным:

$$\frac{\partial(q_1, \dots, q_s)}{\partial(Q_1, \dots, Q_s)} \neq 0).$$

В гамильтоновом подходе аналогичное свойство отсутствует: при произвольном переходе от “старых” координат и импульсов  $q_i, p_i$  к “новым”  $Q_i, P_i$ , т. е. при замене

$$q_i = q_i(Q, P, t), \quad p_i = p_i(Q, P, t), \quad i = 1, \dots, s, \quad (36.1)$$

уравнения Гамильтона, вообще говоря, не сохраняют свой вид. Но среди всех преобразований вида (1) имеется специальный класс так называемых *канонических преобразований*, которые не только сохраняют вид уравнений движения, но и обладают целым рядом других привлекательных свойств. К сожалению, определение канонического преобразования не очень наглядно.

### 36.1. Определение канонического преобразования.

#### Производящая функция

*Каноническим* называется преобразование вида (1) такое, что

$$\sum_{i=1}^s p_i dq_i = \sum_{i=1}^s P_i dQ_i + dF(q, Q, \check{t}), \quad (36.2)$$

где  $dF(q, Q, \check{t})$  есть полный дифференциал функции  $F(q, Q, t)$  при фиксированном времени, т. е.

$$dF(q, Q, \check{t}) = \left[ dF(q, Q, t) - \frac{\partial F}{\partial t} dt \right]_{t=\check{t}}. \quad (36.3)$$

Таким образом, при каноническом преобразовании время  $t$  является параметром. Функция  $F(q, Q, t)$  называется *производящей функцией* данного канонического преобразования. Из определения (2) немедленно получаем

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}. \quad (36.4)$$

Разрешая эти алгебраические соотношения, можно по известной производящей функции  $F(q, Q, t)$  получить явные уравнения связи старых и новых переменных типа (1).

Докажем ковариантность уравнений Гамильтона относительно канонических преобразований. Напомним, что из вариационного принципа (см. § 34)

$$\delta \Sigma = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[ \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta q_i - \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta p_i \right] dt + \sum_i p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (36.5)$$

с учетом граничных условий (34.2) и независимости вариаций  $\delta q_i$  и  $\delta p_i$  следуют уравнения Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

В силу (2), (3) функционал  $\Sigma$  равен

$$\Sigma = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_i P_i \dot{Q}_i - H'(P, Q, t) \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} dF(q, Q, t),$$

где

$$H'(P, Q, t) = H(p, q, t) + \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial t}, \quad (36.6)$$

и поэтому вариационный принцип (5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \delta \Sigma &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[ \left( \dot{Q}_i - \frac{\partial H'}{\partial P_i} \right) \delta Q_i - \left( \dot{P}_i + \frac{\partial H'}{\partial Q_i} \right) \delta P_i \right] dt + \\ &+ \sum_i \left( P_i \delta Q_i + \frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i} \delta Q_i \right) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0. \end{aligned}$$

В силу соотношений (4) и граничных условий (34.2) внеинтегральные слагаемые исчезают, поэтому с учетом независимости вариаций  $\delta Q_i$  и  $\delta P_i$  мы получаем уравнения движения для новых переменных, также имеющие вид уравнений Гамильтона,

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}, \quad (36.7)$$

с новой функцией Гамильтона  $H'(P, Q, t)$ , определяемой формулой (6).

Таким образом, производящая функция  $F(q, Q, t)$  задает каноническое преобразование с помощью формул (4); эти формулы и соотношение (6) могут быть представлены в следующем компактном виде:

$$dF(q, Q, t) = \sum_i (p_i dq_i - P_i dQ_i) + (H' - H) dt. \quad (36.8)$$

**Пример.** Рассмотрим одномерную систему с гамильтонианом  $H(p, q, t)$ . Простейшим нетривиальным примером канонических преобразований может служить линейное преобразование координат и импульсов, получаемое из производящей функции  $F(q, Q, t)$ , имеющей вид квадратичной формы канонических переменных:

$$F(q, Q, t) = \frac{1}{2} (a q^2 + 2b q Q + c Q^2) \quad (36.9)$$

(здесь величины  $a$ ,  $b$  и  $c$  являются либо константами, либо функциями времени). Используя уравнения (4), находим соотношения

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = a q + b Q, \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = -b q - c Q.$$



Разрешая их, получаем линейные уравнения связи старых и новых переменных:

$$Q = \alpha q + \beta p, \quad P = \gamma q + \delta p, \quad (36.10)$$

в которых коэффициенты равны

$$\alpha = -\frac{a}{b}, \quad \beta = \frac{1}{b}, \quad \gamma = \frac{ac - b^2}{b}, \quad \delta = -\frac{c}{b}. \quad (36.11)$$

Обратим внимание на то, что эти коэффициенты не являются произвольными, а именно, якобиан преобразования (10) равен единице<sup>15</sup>

$$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} = \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \quad (36.12)$$

Новый гамильтониан, определяемый уравнением (6), имеет вид

$$H'(P, Q, t) = H(p, q, t) + \frac{1}{2} \left( \dot{a} q^2 + 2\dot{b} qQ + \dot{c} Q^2 \right), \quad (36.13)$$

причем в правой стороне этого равенства необходимо заменить старые переменные  $q$  и  $p$  на новые переменные  $Q$  и  $P$  согласно соотношениям (10).

## 36.2. Другие производящие функции

Помимо производящей функции  $F(q, Q, t)$  можно ввести другие производящие функции от переменных  $q, P$ , или  $Q, p$ , или  $p, P$ . Например, подставив в (8) соотношение

$$P_i dq_i = d(P_i Q_i) - Q_i dP_i,$$

и вводя производящую функцию

$$\Phi(q, P, t) = F + \sum_{i=1}^s Q_i P_i, \quad (36.14)$$

получим

$$d\Phi(q, P, t) = \sum_{i=1}^s (p_i dq_i + Q_i dP_i) + (H' - H) dt. \quad (36.15)$$

Отсюда для производящей функции  $\Phi(q, P, t)$  немедленно следуют аналогичные (4), (6) формулы

$$p_i = \frac{\partial\Phi}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial\Phi}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial\Phi}{\partial t}. \quad (36.16)$$

Приведем простые примеры. Производящая функция

$$F(q, Q, t) = \sum_{i=1}^s q_i Q_i$$

---

<sup>15</sup>Таким образом, условие (12) является необходимым для того, чтобы линейное преобразование (10) было каноническим. Далее мы покажем, что (12) является также и достаточным условием (см. пример 1 в § 38).

с точностью до знака обменивает координаты и импульсы:

$$Q_i = p_i, P_i = -q_i.$$

По этой причине в гамильтоновом методе термины “координаты” и “импульсы” становятся условными и переменные  $p, q$  часто называют просто *канонически сопряженными величинами*.

Производящая функция

$$\Phi(q, P, t) = \sum_{i=1}^s q_i P_i$$

задаёт тождественное преобразование:

$$Q_i = q_i, P_i = p_i.$$

Производящую функцию преобразования, близкого к тождественному, нередко можно представить в виде  $\Phi(q, P, t) = \sum_i q_i P_i + \varepsilon W(q, P)$ , где параметр  $\varepsilon$  определяет малость поправки.

**Пример.** В качестве примера рассмотрим производящую функцию

$$\Phi(q, P, t) = qP + \delta\tau H(P, q, t), \quad (36.17)$$

где  $\varepsilon \equiv \delta\tau$  бесконечно малый параметр, а  $H(p, q, t)$  — функция Гамильтона системы. В этом случае уравнения связи старых и новых переменных (16) имеют вид

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial\Phi}{\partial q} = P + \delta\tau \frac{\partial H(P, q, t)}{\partial q}, \\ Q &= \frac{\partial\Phi}{\partial P} = q + \delta\tau \frac{\partial H(P, q, t)}{\partial P}. \end{aligned}$$

Используя малость параметра  $\delta\tau$ , можем переписать эти уравнения в виде

$$\begin{aligned} P(t) &= p - \delta\tau \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial q} = p(t) + \dot{p}\delta\tau = p(t + \delta\tau), \\ Q(t) &= q + \delta\tau \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial p} = q(t) + \dot{q}\delta\tau = q(t + \delta\tau). \end{aligned}$$

Таким образом, рассматриваемое преобразование

$$Q(t) = q(t + \delta\tau), P(t) = p(t + \delta\tau) \quad (36.18)$$

представляет собой сдвиг по времени на  $\delta\tau$  (ср. [1, § 45]). Новая функция Гамильтона

$$\begin{aligned} H'(P, Q, t) &= H(p, q, t) + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = H(p, q, t) + \delta\tau \frac{\partial H(P, q, t)}{\partial t} \approx \\ &\approx H(p, q, t) + \delta\tau \frac{dH(p, q, t)}{dt} = H(p, q, t + \delta\tau) \end{aligned}$$

также соответствует сдвигу по времени на  $\delta\tau$ . Отсюда следует, что, совершая последовательные малые сдвиги по времени, можно получить конечный сдвиг по времени и показать, что преобразование

$$Q(t) = q(t + \tau), P(t) = p(t + \tau) \quad (36.19)$$

также является каноническим. Производящая функция для этого преобразования будет указана в § 39.2.

В заключение этого раздела упомянем, что канонические преобразования особенно просто выглядят в формализме *внешних дифференциальных форм*. Этот вопрос рассматривается в Приложении D. В частности, в этом формализме легко доказывается следующие важные свойства канонических преобразований: скобки Пуассона инвариантны относительно канонических преобразований; якобиан канонического преобразования (1) равен единице (это означает, что при канонических преобразованиях фазовый объём сохраняется).

В стандартном подходе доказательство этих свойств выглядит заметно более громоздким (см. ниже § 37, 40).

## Задачи

**36.1** Выяснить смысл канонических преобразований, задаваемых производящими функциями:

а)  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = \mathbf{rP} + \delta a \mathbf{P}$ ;

б)  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = \mathbf{rP} + \delta \varphi[\mathbf{r}, \mathbf{P}]$ .

Здесь  $\mathbf{r}$  — декартовы координаты, а  $\delta a$  и  $\delta \varphi$  бесконечно малые параметры.

**36.2** Показать, что каноническое преобразование, задаваемое производящей функцией

$$\Phi(x, y, P_x, P_y) = xP_x + yP_y + \varepsilon(xy + P_xP_y),$$

где  $\varepsilon \rightarrow 0$ , представляет собой поворот в фазовом пространстве.

## § 37. Канонические преобразования и скобки Пуассона

Существует тесная связь между каноническими преобразованиями и скобками Пуассона. В этом разделе мы обсудим два важных свойства скобок Пуассона. Во-первых, мы покажем, что скобки Пуассона инвариантны относительно канонических преобразований, а во-вторых, представим простой и конструктивный способ проверки с помощью так называемых фундаментальных скобок Пуассона того, является ли данное преобразование каноническим.

### 37.1. Инвариантность скобок Пуассона относительно канонических преобразований

Докажем, что *скобки Пуассона инвариантны относительно канонических преобразований*. При этом удобно использовать тот же формальный приём, что и при доказательстве тождества Якоби в § 35.2. Пусть  $f$  и  $h$  — некоторые функции  $q, p$  и  $t$ . Напомним, что в канонических преобразованиях время есть параметр, и будем далее считать  $t = \text{const}$ . Положим, что  $h(q, p, t)$  есть “гамильтониан” некоторой воображаемой механической системы. Как и в § 35.2, это предположение означает, что развитие  $q_i$  и  $p_i$  в зависимости от воображаемого “времени”  $\tau$  (никак не связанного с реальным временем  $t$ ) определяется “каноническими уравнениями” (35.9), из которых можно

найти  $q_i$  и  $p_i$  как функции  $\tau$ , а значит, и  $f(q(\tau), p(\tau), t)$  как функцию  $\tau$ . При этом в согласии с (35.3)

$$\frac{df}{d\tau} = \{h, f\}_{p,q} \equiv \sum_i \left( \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right). \quad (37.1)$$

Для канонического преобразования  $q, p \rightarrow Q, P$  вида (36.1), в которое “время”  $\tau$  явным образом не входит, новый “гамильтониан” есть

$$h'(Q, P, t) = h(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t), \quad (37.2)$$

и поэтому производная по  $\tau$  от  $f(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t)$  задается формулой

$$\frac{df}{d\tau} = \{h', f\}_{P,Q} \equiv \sum_i \left( \frac{\partial h'}{\partial P_i} \frac{\partial f}{\partial Q_i} - \frac{\partial h'}{\partial Q_i} \frac{\partial f}{\partial P_i} \right). \quad (37.3)$$

Левые части формул (1) и (3) совпадают, поэтому совпадают и правые части этих соотношений, что с учетом (2) приводит к искомому равенству:

$$\{h, f\}_{p,q} = \{h, f\}_{P,Q}. \quad (37.4)$$

## 37.2. Необходимый и достаточный признак того, что преобразование является каноническим

Мы уже отмечали, что определение канонических преобразований, данное в § 36.1, не очень наглядно. Кроме того, оно еще дополнительно и не очень эффективно в том смысле, что с его помощью часто не очень просто проверить, что данное преобразование является каноническим. Поэтому особую важность имеет установление простого и конструктивного признака того, что преобразование каноническое. Оказывается, чтобы преобразование  $q, p \rightarrow Q, P$  вида (36.1) было каноническим, необходимо и достаточно выполнение следующих равенств для так называемых *фундаментальных скобок Пуассона*:

$$\{Q_i, Q_j\}_{p,q} = 0, \quad \{P_i, P_j\}_{p,q} = 0, \quad \{P_i, Q_j\}_{p,q} = \delta_{ij}. \quad (37.5)$$

Если данное преобразование каноническое, то соотношения (5) необходимо следуют из равенств (4). Например:

$$\{Q_i, Q_j\}_{p,q} = \{Q_i, Q_j\}_{P,Q} = \sum_k \left( \frac{\partial Q_i}{\partial P_k} \frac{\partial Q_j}{\partial Q_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_j}{\partial P_k} \right) = 0, \quad (37.6)$$

так как  $\partial Q_l / \partial P_k = 0$  из-за независимости канонических координат и импульсов.

Сложнее доказывается достаточность. Пусть  $q, p$  — канонические переменные, а преобразование к новым переменным  $Q, P$  вида (36.1) таково, что для них выполняются соотношения (5). Покажем, что

$$\sum_i (p_i dq_i - P_i dQ_i)$$

есть полный дифференциал (при фиксированном значении времени  $t = \text{const}$ ) некоторой функции  $F$ . Перейдем к переменным  $Q, P$ :

$$\sum_i (p_i dq_i - P_i dQ_i) = \sum_{ik} p_i \left( \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} dQ_k + \frac{\partial q_i}{\partial P_k} dP_k \right) - \sum_i P_i dQ_i. \quad (37.7)$$

Чтобы это выражение было полным дифференциалом  $dF$ , достаточно, как известно, выполнение следующих равенств:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial Q_j \partial Q_l} &= \frac{\partial^2 F}{\partial Q_l \partial Q_j}, & \frac{\partial^2 F}{\partial P_j \partial P_l} &= \frac{\partial^2 F}{\partial P_l \partial P_j}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial P_j \partial Q_l} &= \frac{\partial^2 F}{\partial P_l \partial Q_j}. \end{aligned} \quad (37.8)$$

Рассмотрим последнее равенство. Из него следует, что

$$\frac{\partial}{\partial P_j} \left( \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} - P_l \right) = \frac{\partial}{\partial Q_l} \left( \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \right)$$

или

$$[P_j, Q_l]_{p,q} \equiv \sum_i \left( \frac{\partial p_i}{\partial P_j} \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_l} \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \right) = \delta_{jl}. \quad (37.9a)$$

Введенная здесь величина  $[f, g]_{p,q}$  называется *скобкой Лагранжа*. Из остальных равенств (8) аналогично получаем

$$[Q_j, Q_l]_{p,q} = 0, \quad [P_j, P_l]_{p,q} = 0. \quad (37.9b)$$

Таким образом, если для скобок Лагранжа от новых переменных  $Q, P$  справедливы соотношения (9), то данное преобразование является каноническим.

Следующий шаг состоит в переходе от скобок Лагранжа к скобкам Пуассона, которые являются как бы “обратными величинами” скобок Лагранжа. Обозначим  $u_1 = Q, u_2 = Q_2, \dots, u_s = Q_s, u_{s+1} = P_1, \dots, u_{2s} = P_s$  и введем две квадратные  $2s \times 2s$  матрицы  $\hat{L}$  и  $\hat{P}$ , элементы которых суть

$$L_{ij} = [u_i, u_j], \quad P_{ij} = \{u_i, u_j\}; \quad i, j = 1, 2, \dots, 2s.$$

Нетрудно показать (см. [2, § 8.4]), что эти матрицы взаимно обратны, т. е.  $\hat{L}\hat{P} = \hat{E}$  или  $\hat{L}^{-1} = \hat{P}$ , где  $\hat{E}$  — единичная матрица. После этого почти очевидно, что из равенств (5) следуют соотношения (9).

## § 38. Примеры канонических преобразований

**Пример 1.** Используя условия (37.5), легко показать, что линейное преобразование

$$Q = \alpha x + \beta p, \quad P = \gamma x + \delta p, \quad (38.1)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — комплексные числа или функции времени, является каноническим, если

$$\{P, Q\}_{p,x} = \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

**Пример 2.** Частным случаем преобразования (1) является поворот на угол  $\varphi$  в плоскости  $x, p/(m\omega)$  (рис. 56). Для гармонического осциллятора

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad p = -m\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (38.2)$$

такой поворот (по часовой стрелке!) с  $\varphi = \omega t$  приводит к новым каноническим пере-

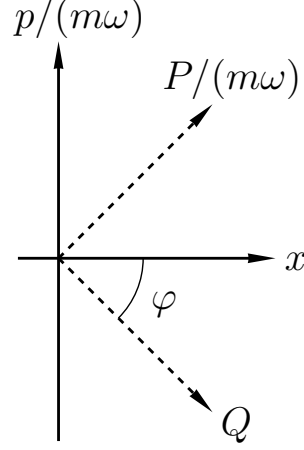


Рис. 56. Поворот на угол  $\varphi$  по часовой стрелке на плоскости  $x, p/(m\omega)$  — каноническое преобразование

менным

$$Q = A \cos \varphi_0, \quad P = -m\omega A \sin \varphi_0,$$

не зависящим от времени, и к новому гамильтониану

$$H' = 0.$$

Такие простые канонические переменные и тривиальный вид нового гамильтониана интересны не сами по себе, а как первый шаг для построения теории возмущений в случае, если исходный гамильтониан отличается от гамильтониана гармонического осциллятора малыми добавками (см., например, [3, задача 11.28]).

**Пример 3.** В квантовой теории гармонического осциллятора важную роль играют следующие комбинации координат и импульсов:

$$a = \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}}, \quad a^* = \frac{m\omega x - ip}{\sqrt{2m\omega}} \quad (38.3)$$

(им соответствуют операторы уничтожения и рождения квантов). Можно убедиться, что

$$Q = a, \quad P = ia^* \quad (38.4)$$

являются каноническими переменными. Для гармонического осциллятора (2) новые канонические переменные зависят от времени следующим образом:

$$Q = a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} A e^{-i(\omega t + \varphi_0)}, \quad P = ia^* = i\sqrt{\frac{m\omega}{2}} A e^{+i(\omega t + \varphi_0)}, \quad (38.5a)$$

а новый гамильтониан имеет простой вид

$$H' = \omega a^* a = -i\omega QP. \quad (38.5b)$$

Легко сообразить, что каноническими переменными являются также величины

$$ae^{i\omega t} \quad \text{и} \quad ia^* e^{-i\omega t}.$$

Для гармонического осциллятора (2) такие величины не зависят от времени, а новый гамильтониан  $H' = 0$ . Об использовании таких переменных в ряде задач о нелинейных колебаниях см. [3, задачи 11.25, 11.27].

**Пример 4.** Для частицы в однородном магнитном поле, направленном по оси  $z$ , введем переменные

$$\begin{aligned} P_X &= p_x = mv_x, & X &= x - \frac{p_y}{m\omega} = -\frac{v_y}{\omega}, \\ P_Y &= p_y = m\omega x_0, & Y &= y - \frac{p_x}{m\omega} = y_0 \end{aligned}$$

(см. пример 1 в § 33.2). Легко проверить, вычисляя фундаментальные скобки Пуассона, что переход к этим переменным от  $x, y, p_x, p_y$  — каноническое преобразование.

Если магнитное поле постоянно, то новая функция Гамильтона сведется к осцилляторной:

$$H(P_X, P_Y, X, Y) = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \frac{P_X^2}{2m} + \frac{m\omega^2 X^2}{2}.$$

**Пример 5.** С помощью канонического преобразования, представляющего собой поворот на один и тот же угол в плоскости  $x, p_y/(m\omega)$  и плоскости  $y, p_x/(m\omega)$ , можно привести гамильтониан трехмерного анизотропного гармонического осциллятора в однородном магнитном поле к сумме квадратов (см. [3, задачи 11.7–11.9]).

## Задача

**38.1** Рассматриваются малые колебания ангармонического осциллятора, функция Гамильтона которого

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3$$

и  $|\alpha x| \ll m\omega^2$ .

Выполнить каноническое преобразование, близкое к тождественному, с помощью производящей функции

$$\Phi(x, P, t) = xP + ax^3 + bx^2P + cxP^2 + dP^3.$$

Покажите, что можно использовать  $a = c = 0$  и подобрать параметры  $b$  и  $d$  так, чтобы новая функция Гамильтона сводилась к функции Гамильтона гармонического осциллятора с точностью до членов третьего порядка по новым переменным  $Q$  и  $P$  включительно. Найти  $x(t)$ .

## § 39. Действие вдоль истинной траектории как функция начальных и конечных координат и времени

Рассмотрим частицу, имеющую в начальный момент  $t_1$  обобщённую координату  $q^{(1)}$  (точка 1 на рис. 57). Различным значениям скорости в начальный момент времени отвечают различные законы движения — кривые  $a, b, c, \dots$ . Пусть точке 2 на рис. 57 с координатой  $q$  и временем  $t$  соответствует некоторая кривая  $a$ . Интеграл

$$S_{12} = \int_1^2 L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (39.1a)$$

взятый вдоль кривой  $a$  от точки 1 до точки 2, является (при фиксированном значении  $t_1$  и  $q^{(1)}$ ) функцией конечной точки 2:

$$S_{12} = S(q, t). \quad (39.1b)$$

Эту функцию мы и будем рассматривать далее. В отличие от интегралов действия, рассматриваемых в вариационных принципах, в (1) используется истинный закон движения  $q(t)$ .

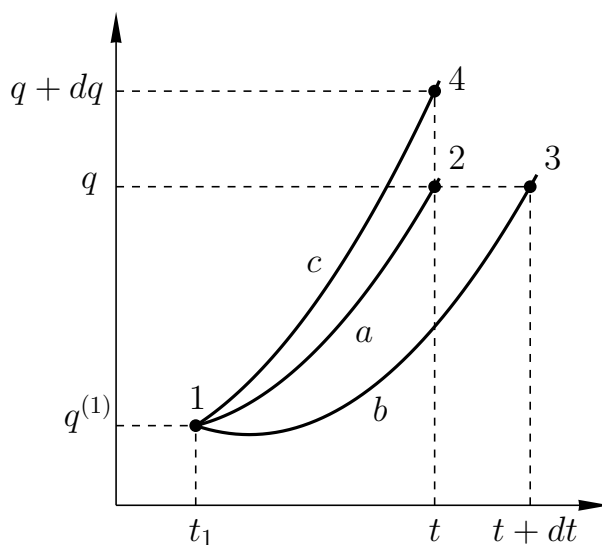


Рис. 57. К определению действия как функции координат и времени и её частных производных

Оказывается, с использованием этой функции можно развить ещё один способ решения задач механики, который отличается от подходов Ньютона, Лагранжа, Гамильтона. Этот подход позволяет провести аналогию между задачами механики и оптики (см. далее § 41.3). Более того, функция  $S(q, t)$  полезна и в квантовой механике, где в квазиклассическом приближении величина  $S(q, t)/\hbar$  совпадает с фазой волновой функции (здесь  $\hbar$  — постоянная Планка). Разберем подробнее свойства  $S(q, t)$ .



### 39.1. Свойства $S(q, t)$

Найдем частные производные функции  $S(q, t)$ . Начнем с  $\partial S/\partial t$ . Для этого вспомним принцип наименьшего действия и рассмотрим два различных пути, ведущих из точки 1 в точку 3 с координатой  $q$  и временем  $t + dt$ : один путь вдоль кривой истинного движения  $b$  (вклад этого пути в действие есть  $S(q, t + dt)$ ), второй путь состоит из участка  $1 \rightarrow 2$  вдоль кривой истинного движения  $a$  (вклад этого участка в действие равен  $S(q, t)$ ) и малого участка  $2 \rightarrow 3$ , вклад которого в действие равен  $Ldt$ . Вспоминая соотношение

$$L = p\dot{q} - H$$

и учитывая, что на участке  $2 \rightarrow 3$  величина  $\dot{q} = 0$ , получаем

$$Ldt|_{2 \rightarrow 3} = -Hdt.$$

Согласно принципу Гамильтона,  $\delta S = 0$ , т. е. первый и второй пути дают одинаковый с точностью до малых величин  $\sim dt$  включительно вклад в действие. Поэтому

$$S(q, t + dt) = S(q, t) - Hdt,$$

откуда получаем

$$S(q, t + dt) - S(q, t) = -Hdt,$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H. \quad (39.2)$$

Чтобы найти  $\partial S/\partial q$ , рассмотрим приращение  $S(q, t)$  при переходе от точки  $(q, t)$  (точка 2 на рис. 57) к точке  $(q + dq, t)$  (точка 4 на рис. 57). Приравняем

$$S(q + dq, t) = \int_1^4 Ldt$$

вдоль кривой  $c$  и вдоль “пробного” пути, состоящего из участка  $1 \rightarrow 2$  кривой  $a$  и малого участка  $2 \rightarrow 4$ . Строго говоря, путь  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$  не должен быть “допущен к конкурсу” в принципе наименьшего действия, так как на участке  $2 \rightarrow 4$  величина  $\dot{q}$  обращается в бесконечность. Но допустима зависимость  $q(t)$ , сколь угодно близкая и притом достаточно гладкая. Поэтому для участка  $2 \rightarrow 4$  можно принять

$$dt \rightarrow 0, \quad \dot{q} \rightarrow \infty, \quad \dot{q}dt = dq.$$

Вклад в действие этого участка

$$Ldt|_{2 \rightarrow 4} = (p\dot{q} - H)dt = pdq - Hdt$$

сводится к  $pdq$ . Итак,

$$S(q + dq, t) = S(q, t) + pdq,$$

откуда  $\partial S/\partial q = p$ . В случае нескольких степеней свободы, действуя так же, получаем

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \quad (39.3)$$

Аналогично можно рассматривать действие как функцию координат  $q_i^{(1)}$  и времени  $t_1$  начала движения. В итоге получаем

$$dS(q, t, q^{(1)}, t_1) = \sum_i p_i dq_i - Hdt - \sum_i p_i^{(1)} dq_i^{(1)} + H^{(1)} dt_1. \quad (39.4)$$

## 39.2. Движение системы как каноническое преобразование

Функция  $S(q, t, q^{(1)}, t_1)$  могла бы быть реально найдена лишь после того, как найден закон движения  $q_i(t)$ . Но сам факт существования этой функции позволяет сделать определенные общие заключения о движении системы, задаваемом уравнениями Гамильтона. Например, можно утверждать, что *переход от начальных значений координат и импульсов к их значениям спустя время  $\tau$  является каноническим преобразованием*<sup>16</sup>. Соответствующая производящая функция

$$F(q^{(1)}, q, t) = -S(q, t + \tau, q^{(1)}, t), \quad (39.5)$$

где  $q^{(1)}$  рассматривается как старые, а  $q$  — как новые координаты. С учетом (4) можно видеть, что при этом преобразовании происходит также переход от старого гамильтониана  $H^{(1)}$  к новому  $H$ .

## 39.3. Доказательство теоремы Нётер

Найденные выше свойства  $S(q, t, q^{(1)}, t_1)$  позволяют сравнительно просто доказать теорему Нётер, формулировка которой дана в § 14.3. Пусть  $q_i = g_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, s$  описывает истинное движение системы. Рассчитанное вдоль этой траектории действие есть функция начальных и конечных координат и времени:

$$S_{12} \equiv S(q^{(2)}, t_2, q^{(1)}, t_1) = \int_1^2 L \left( g(t), \frac{dg(t)}{dt}, t \right) dt.$$

Так как вид действия не изменяется при переходе к переменным  $q'_i, t'$ , равенства  $q'_i = g_i(t')$  также описывают действительное движение системы. Выраженные в переменных  $q_i, t$  с точностью до первого порядка по  $\varepsilon$ , эти равенства имеют вид

$$q_i + \delta q_i = g_i(t + \delta t),$$

где

$$\delta q_i = \varepsilon f_i(q(t), t), \quad \delta t = \varepsilon h(q(t), t).$$

Соответствующее действие

$$S_{1'2'} = \int_{1'}^{2'} L \left( g(t'), \frac{dg(t')}{dt'}, t' \right) dt' = S(q^{(2)} + \delta q^{(2)}, t_2 + \delta t_2, q^{(1)} + \delta q^{(1)}, t_1 + \delta t_1).$$

Малые изменения координат и времени начала и конца движения при переходе от траектории  $g(t)$  на участке 12 к траектории  $g(t')$  на участке 1'2' приводят к изменению действия (4):

$$S_{1'2'} - S_{12} = \sum_i p_i(t_2) \delta q_i^{(2)} - E(t_2) \delta t_2 - \sum_i p_i(t_1) \delta q_i^{(1)} + E(t_1) \delta t_1. \quad (39.6)$$

Здесь подразумевается, что энергия  $E(t)$ , координаты  $q_i(t)$ , и импульсы  $p_i(t)$  рассматриваются как функции времени на истинной траектории движения системы.

С другой стороны, согласно условию теоремы,  $S_{12} = S_{1'2'}$ , так что

$$E(t) \cdot h(q(t), t) - \sum_{i=1}^s p_i(t) \cdot f_i(q(t), t) = \text{const}. \quad (39.7)$$

<sup>16</sup>Этот факт отмечался ранее — см. (36.19).

## § 40. Теорема Лиувилля

### 40.1. Инвариантность фазового объёма относительно канонических преобразований

Пусть замкнутая  $2s - 1$ -мерная поверхность выделяет в  $2s$ -мерном фазовом пространстве с координатами  $p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s$  некоторую область  $\Omega$ . Назовем *фазовым объёмом* этой области интеграл

$$\Gamma = \int_{\Omega} dp_1 \dots dp_s dq_1 \dots dq_s.$$

При произвольном преобразовании от переменных  $q, p$  к переменным  $Q, P$  область  $\Omega$  переходит в область  $\Omega'$  в новых переменных и интеграл преобразуется к виду

$$\Gamma = \int_{\Omega'} D dP_1 \dots dP_s dQ_1 \dots dQ_s$$

где

$$D = \frac{\partial(P, Q)}{\partial(p, q)}.$$

— якобиан преобразования. Здесь и далее буквой  $p$  обозначена совокупность переменных  $p_1, \dots, p_s$  и аналогично для  $q, P$  и  $Q$ . С другой стороны, фазовый объём области  $\Omega'$  равен

$$\Gamma' = \int_{\Omega'} dP_1 \dots dP_s dQ_1 \dots dQ_s.$$

Докажем, что если преобразование каноническое, то  $D = 1$  и фазовый объём не зависит от выбора координат:  $\Gamma' = \Gamma$ .

Выполним преобразование координат в два этапа. Вначале перейдём от переменных  $p, q$  к переменным  $P, q$  а только затем к переменным  $P, Q$ . Якобиан полного преобразования равен произведению якобианов последовательных этапов:

$$D = \frac{\partial(P, Q)}{\partial(P, q)} \frac{\partial(P, q)}{\partial(p, q)}.$$

В каждом из сомножителей переменные, не изменяющиеся при замене, можно опустить, что в нашем случае означает переход к матрицам вдвое меньшего размера. Кроме того, учитывая, что якобианы взаимно обратных преобразований сами взаимно обратны и переходя к обратному якобиану во втором сомножителе, получаем

$$D = \frac{\partial(Q)}{\partial(q)} \Big|_{P=\text{const}} / \frac{\partial(p)}{\partial(P)} \Big|_{q=\text{const}}. \quad (40.1)$$

Воспользуемся теперь тем, что преобразование каноническое и будем считать, что оно задано производящей функцией  $\Phi(q, P)$ . Выражая через нее матричные элементы якобианов, стоящих в числителе и знаменателе, получаем

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial q_k \partial P_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial P_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i \partial P_k}.$$

Матрицы в числителе и знаменателе равенства (1) взаимно транспонированы, их определители равны и поэтому  $D = 1$ , что и требовалось доказать.

Пусть каждая точка выделенного фазового объёма движется согласно уравнениям движения данной механической системы. Как было показано в § 39.2, такое движение можно рассматривать как каноническое преобразование. Отсюда следует важная в приложениях *теорема Лиувилля*: при движении любой гамильтоновой системы фазовый объём не изменяется. Иными словами, движение точек фазового пространства подобно движению частиц несжимаемой жидкости. Примеры, иллюстрирующие движение точек, изображающих состояние системы в фазовом пространстве, рассмотрены в [3, задача 11.24д].

## 40.2. Фокусирующая линза

Рассмотрим движение группы частиц, проходящих через электростатическую линзу. В этом случае благодаря теореме Лиувилля можно сделать важные качественные заключения, касающиеся движения частиц, даже не зная деталей движения. Пусть слева на рис. 58 вдоль оси  $z$  движется сгусток заряженных частиц, имеющих оди-

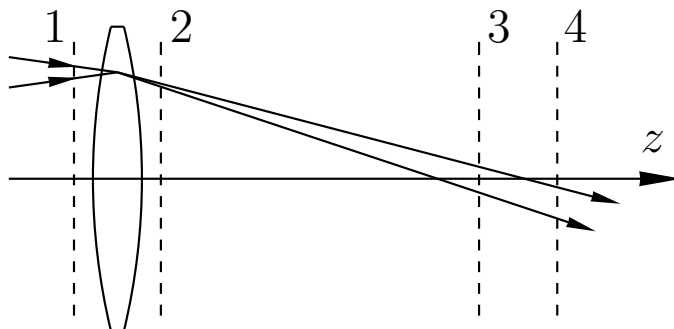


Рис. 58. Движение частиц в области фокусирующей линзы: пунктирные линии соответствуют моментам времени, когда пучок находится перед линзой (*линия 1*), сразу после неё (*линия 2*), в районе фокуса (*линия 3*), после него (*линия 4*)

наковую проекцию импульса на ось  $z$  и небольшой разброс как по поперечной координате  $x$  так и по поперечному импульсу  $p_x$ . Для упрощения анализа рассмотрим только частицы, траектории которых лежат в плоскости  $xz$ .

В узком слое в окрестности точки  $z = 0$  на частицы действуют электрические поля, отклоняющие их только в плоскости  $xz$ . Этот слой и называется электростатической линзой. Пусть поля слабые, так что углы отклонения  $\theta_x = p_x/p_z$  малы,  $|\theta_x| \ll 1$ , и можно принять для каждой частицы  $p_z \approx \text{const}$ . Можно ли создать такую конфигурацию поля, чтобы одновременно уменьшить разброс частиц как по поперечной координате так и поперечному импульсу (т. е. по углам  $\theta_x$ )? Теорема Лиувилля запрещает такую фокусировку.

Действительно, пусть  $H(p_x, p_z, x, z, t)$  — гамильтониан системы. Считая  $p_z = \text{const}$  и подставляя  $z = p_z t/m$ , получаем гамильтониан одномерного поперечного движения. Начальному разбросу частиц по  $x, p_x$  соответствует некоторая область на фазовой плоскости. Одновременной фокусировке по координате и импульсу после прохождения линзы соответствовало бы уменьшение этой площади, что невозможно в

силу теоремы Лиувилля.

Рассмотрим преобразование области на фазовой плоскости при прохождении через конфигурацию поля, работающую как фокусирующая линза, т. е. сжимающую

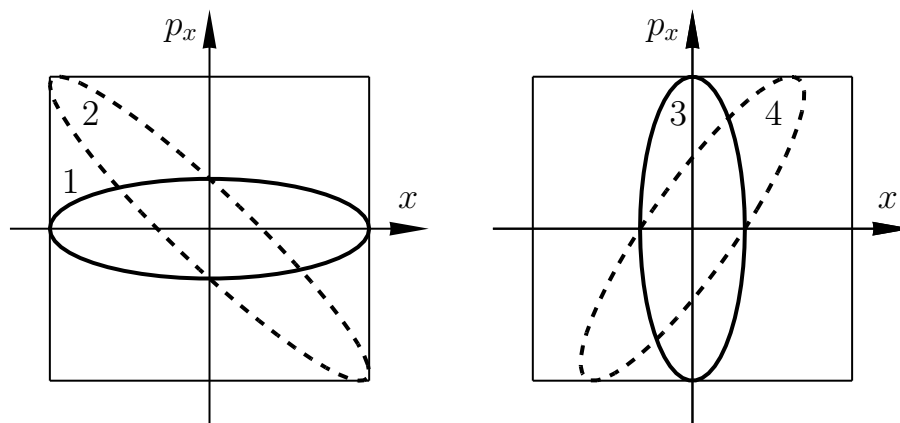


Рис. 59. Области фазового пространства, занятые пучком частиц в разные моменты времени: 1-2-3-4

широкий по оси  $x$  пучок в узкий пучок. На рис. 59 показана фазовая плоскость  $x, p_x$  для поперечного движения. Пусть эллипс 1 представляет собой область, где сосредоточены изображения частиц падающего пучка перед линзой. После прохождения линзы резко возрастает разброс по углам при неизменном размере пучка (см. эллипс 2). Затем наблюдается свободное движение в поперечном направлении, ведущее к сжатию пучка (эллипс 3), а затем — вновь к расширению пучка (эллипс 4). После прохождения линзы разброс по углам остается неизменным. Зависимость концентрации от  $z$  можно описывать, пользуясь формулами из [3, задача 11.24e].

## Задача

40.1 а) Как изменяются со временем объём, объём в импульсном пространстве и фазовый объём, занимаемые группой свободно движущихся вдоль оси  $x$  частиц? В начальный момент координаты частиц заключены в интервале  $x_0 < x < x_0 + \Delta x_0$ , а импульсы — в интервале  $p_0 < p < p_0 + \Delta p_0$ .

б) Тот же вопрос для частиц, движущихся вдоль оси  $x$  между двумя стенками. Соударения со стенками абсолютно упругие. Друг с другом частицы не взаимодействуют.

в) Тот же вопрос для группы гармонических осцилляторов.

г) Тот же вопрос для группы гармонических осцилляторов с трением.

## § 41. Уравнение Гамильтона–Якоби

### 41.1. Уравнение Гамильтона–Якоби. Метод разделения переменных

Действие  $S(q, t, q^{(1)}, t_1)$  удовлетворяет уравнению, которое легко получить, если в соотношение (39.2)

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(p_1, p_2, \dots, p_s, q_1, q_2, \dots, q_s, t)$$

вместо  $p_i$  подставить его выражение  $p_i = \partial S / \partial q_i$  из формулы (39.3). В итоге получим уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, q_1, \dots, q_s, t\right) = 0, \quad (41.1)$$

аналогичное уравнению эйконала для световых лучей. Оказывается, что с его помощью также можно решить задачу о движении механической системы. Для этого нужно найти *полный интеграл* уравнения (1) — функцию, удовлетворяющую ему и зависящую от  $s$  произвольных параметров  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  (не считая несущественной аддитивной  $s + 1$ -й постоянной  $\alpha_{s+1}$ ):

$$S = f(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t) + \alpha_{s+1}. \quad (41.2)$$

Тогда нахождение  $q_i(t)$  и  $p_i(t)$  сведётся к решению только алгебраических уравнений.

Чтобы показать это, примем  $f(q, \alpha, t)$  за производящую функцию канонического преобразования, а  $\alpha_i$  — за новые импульсы. Тогда каноническое преобразование

$$q_i = q_i(\alpha, \beta, t), \quad p_i = p_i(\alpha, \beta, t) \quad (41.3)$$

определяется соотношениями

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (41.4)$$

где через  $\beta_i$  обозначены новые координаты. Новый гамильтониан

$$H'(\alpha, \beta, t) = H + \frac{\partial f}{\partial t}$$

согласно (1), (2) оказывается тождественно равным нулю:  $H'(\alpha, \beta, t) = 0$ . Новые канонические переменные в силу уравнений

$$\dot{\alpha}_i = -\frac{\partial H'}{\partial \beta_i} = 0, \quad \dot{\beta}_i = -\frac{\partial H'}{\partial \alpha_i} = 0$$

оказываются интегралами движения, а уравнения (3) определяют закон движения, причем параметров  $\alpha, \beta$  как раз достаточно, чтобы удовлетворить начальным условиям.

Как же находить полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби и всегда ли это возможно? Это возможно во всех случаях, когда задача интегрирования уравнений движения сводится к квадратурам. Однако такие случаи можно считать, скорее,

исключениями. Представляющие наибольший физический интерес примеры перечислены в [1, § 48]. В частности, это задачи о движении частицы в поле пары неподвижных кулоновских центров, в кулоновском поле с добавлением однородного поля. При этом успех достигается удачным выбором криволинейных координат. Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби находится методом разделения переменных. Если гамильтониан не зависит от времени явно, то можно искать  $S$  в виде

$$S(q_1, \dots, q_s, t) = -Et + S_0(q_1, \dots, q_s), \quad (41.5)$$

где  $S_0(q_1, \dots, q_s)$  называется *укороченным действием*. Для него получаем уравнение

$$H\left(\frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}, q_1, \dots, q_s\right) = E. \quad (41.6)$$

Далее представляем  $S_0$  в виде

$$S_0(q_1, \dots, q_s) = \sum_{i=1}^s S_i(q_i), \quad (41.7a)$$

при этом

$$S_i(q_i) = \int p_i(q_i) dq_i. \quad (41.7b)$$

Ясно, что уравнение (6) имеет решение такого вида отнюдь не всегда, о чем и шла речь выше.

## 41.2. Движение релятивистской частицы в поле $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$

В нашем случае гамильтониан релятивистской частицы имеет вид (33.12):

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} - \frac{\alpha}{r},$$

где релятивистский импульс

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

При движении в центральном поле сохраняются релятивистские энергия  $\mathcal{E}$  и момент импульса  $\mathbf{M}$ :

$$\mathcal{E} = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} - \frac{\alpha}{r}, \quad \mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}] = \frac{m[\mathbf{r}, \mathbf{v}]}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Отсюда видно, что движение частицы происходит в плоскости, перпендикулярной постоянному вектору  $\mathbf{M}$ . Введем в этой плоскости полярные координаты  $r$  и  $\varphi$ , функция Лагранжа в этих координатах равна

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}{c^2}} + \frac{\alpha}{r}.$$

Соответствующие обобщённые импульсы

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{m\dot{r}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad p_\varphi \equiv M = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{mr^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

связаны соотношением (оно имеет тот же вид, что и в нерелятивистском случае – см. (8.9))

$$\mathbf{p}^2 = p_r^2 + \frac{M^2}{r^2},$$

поэтому

$$p_r(r) = \pm \sqrt{\frac{1}{c^2} \left( \mathcal{E} + \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2 c^2}.$$

Решение уравнение Гамильтона–Якоби для укороченного действия ищем в виде (7):

$$S_0(r, \varphi) = \int p_\varphi(\varphi) d\varphi + \int p_r(r) dr.$$

В итоге получаем полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби

$$S(r, \varphi, \mathcal{E}, M, t) = -\mathcal{E}t + M\varphi + \int p_r(r) dr,$$

где величины  $\mathcal{E}$  и  $M$  играют роль параметров  $\alpha_{1,2}$ .

Уравнение  $\partial S/\partial\alpha_1 = \beta_1$  или  $\partial S/\partial\mathcal{E} = \text{const}$  определяет зависимость  $r(t)$ :

$$t = \frac{1}{c^2} \int \left( \mathcal{E} + \frac{\alpha}{r} \right) \frac{dr}{p_r(r)}, \quad (41.8)$$

а уравнение  $\partial S/\partial M = \text{const}$  или

$$\varphi = \int \frac{M}{r^2} \frac{dr}{p_r(r)} \quad (41.9)$$

определяет траекторию частицы. Сравним уравнение (9) с уравнением (3.21) для траектории движения нерелятивистской частицы в поле

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}.$$

Видно, что уравнение (9) совпадает с уравнением (3.21) при заменах

$$m \rightarrow \frac{\mathcal{E}}{c^2}, \quad E \rightarrow \frac{\mathcal{E}^2 - m^2 c^4}{2\mathcal{E}}, \quad \beta \rightarrow -\frac{\alpha^2}{2\mathcal{E}}. \quad (41.10)$$

Другими словами, уравнение (9) соответствует движению нерелятивистской частицы в кулоновском поле  $U(r) = -\alpha/r$  с возмущением в виде дополнительного центрального поля притяжения

$$\delta U(r) = -\frac{\alpha^2}{2\mathcal{E} r^2}. \quad (41.11)$$

При  $M > \alpha/c$  это позволяет сразу записать ответ для рассматриваемого случая в виде, аналогичном (3.23):

$$r = \frac{\tilde{p}}{1 + \tilde{e} \cos(\gamma\varphi)}, \quad (41.12)$$

где введены обозначения

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{c^2 M^2}}, \quad \tilde{p} = \frac{c^2 M^2 - \alpha^2}{\mathcal{E} \alpha}, \quad \tilde{e} = \sqrt{1 + \frac{(\mathcal{E}^2 - m^2 c^4)(c^2 M^2 - \alpha^2)}{\mathcal{E}^2 \alpha^2}}. \quad (41.13)$$



Для случая  $\mathcal{E} < mc^2$  (при этом  $\tilde{e} < 1$ ) траектория соответствует финитному движению частицы и, вообще говоря, незамкнута (см. рис. 5, б). За одно радиальное колебание частицы ее полярный угол изменится на

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\gamma}, \quad (41.14)$$

поэтому перигелий смещается на угол

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{\gamma} - 2\pi. \quad (41.15a)$$

Для движения планет в солнечной системе можно использовать нерелятивистский предел этого выражения (считая  $v \ll c$  или  $mc^2 - \mathcal{E} \approx \alpha/(2a) \ll mc^2$ )

$$\delta\varphi \approx \pi \frac{\alpha/a}{mc^2(1 - e^2)}, \quad (41.15b)$$

где  $a$  и  $e$  — большая полуось и эксцентриситет планеты. Для планеты Меркурий численное значение смещения перигелия оказывается равным

$$\delta\varphi \approx 7,2'' \text{ в столетие.} \quad (41.16)$$

Наблюдаемая прецессия перигелия Меркурия (после исключения влияния других планет) равна

$$\delta\varphi_{\text{наблюд}} = (43,11 \pm 0,45)'' \text{ в столетие.} \quad (41.17)$$

Это значение  $\delta\varphi_{\text{наблюд}}$  находится в очевидном противоречии с предсказанием (17) специальной теории относительности, но прекрасно согласуется с предсказанием общей теории относительности (см. [10, § 101]):

$$\delta\varphi_{\text{ОТО}} = 6\delta\varphi \approx 43'' \text{ в столетие.} \quad (41.18)$$

### 41.3. Оптико-механическая аналогия

Известно, что распространение световой волны в прозрачной среде с показателем преломления  $n(\mathbf{r})$  можно описывать как движение волновых поверхностей — поверхностей одинаковых фаз  $\Psi(\mathbf{r}, t) = \text{const}$ . В приближении геометрической оптики фаза  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  подчиняется *уравнению эйконала*

$$(\nabla\Psi)^2 = \frac{n^2}{c^2} \left( \frac{\partial\Psi}{\partial t} \right)^2,$$

где  $c$  — скорость света в вакууме (см. [9, § 85]).

Напомним, что для фотона функция Гамильтона согласно (33.12a) имеет вид

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{c}{n(\mathbf{r})} |\mathbf{p}|.$$

Соответствующее уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{c}{n(\mathbf{r})} |\nabla S| = 0$$

фактически совпадает с уравнением эйконала, если принять, что функция  $S(\mathbf{r}, t)$  пропорциональна фазе  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ . Иными словами, в механике фотона роль волновых поверхностей играют поверхности  $S(\mathbf{r}, t) = \text{const}$ , где  $S(\mathbf{r}, t)$  — действие как функция координат и времени.

## Задача

41.1. Определить траектории и законы движения частиц, рассеиваемых в поле

$$U(r, \theta, \varphi) = \frac{a \cos \theta}{r^2}$$

и падающих в центр этого поля. Траекторию выразить через квадратуры, а при  $E\rho^2 \ll a$  — и аналитически. Скорость частиц до рассеяния параллельна оси  $z$ .

## § 42. Переменные действие–угол

Если механическая система, допускающая разделение переменных в уравнении Гамильтона–Якоби, совершает финитное движение, то для неё можно ввести особые канонические переменные  $w_1, \dots, w_s, I_1, \dots, I_s$ , называемые *угловыми переменными и переменными действия*. Они позволяют дать единое и очень простое описание всех таких систем. Кроме того, они полезны при исследовании механических систем, которые получаются в результате более или менее значительной модификации исходных и не допускают разделения переменных. Нередко современные исследования по нелинейной механике стартуют сразу с формулировки задачи в переменных действие–угол. Мы начнем со случая, когда функция Гамильтона системы не зависит от времени явно:  $\partial H/\partial t = 0$ .

### 42.1. Системы с одной степенью свободы

Рассмотрим сначала систему с одной степенью свободы с гамильтонианом  $H(p, q)$ , совершающую периодическое движение. Покажем, что для такой системы можно ввести новые канонические переменные (координату  $w$  и импульс  $I$ ), в которых движение рассматриваемой системы выглядит предельно просто, даже если в исходных переменных  $q$  и  $p$  это движение было достаточно сложным. Именно, импульс  $I$  сохраняется, а координата  $w$  линейно растёт со временем, что соответствует свободному движению точки в этих переменных. При этом вся индивидуальность исходной системы будет “спрятана” в формулах связи старых и новых переменных, так что новое описание будет совершенно одинаковым для самых разных систем. Прежде чем переходить к общему случаю, рассмотрим поучительный пример.

**Пример.** Гармонический осциллятор с гамильтонианом

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = E. \quad (42.1)$$

Новые переменные введём соотношениями (их можно получить, используя производящую функцию (11), приводимую ниже)

$$x = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \sin w, \quad p = \sqrt{2m\omega I} \cos w. \quad (42.2)$$

Легко проверить, что

$$\{p, x\}_{I,w} = 1,$$

т. е. что преобразование (2) является каноническим. Новая функция Гамильтона

$$H'(I, w) = H(p(w, I), x(w, I)) = \omega I$$

не зависит от координаты  $w$ , поэтому новый импульс

$$I = \frac{E}{\omega} \quad (42.3)$$

сохраняется:  $I = \text{const.}$  Уравнение Гамильтона для новой координаты

$$\dot{w} = \frac{\partial H'}{\partial I} = \omega \quad (42.4)$$

приводит к тривиальному закону движения:

$$w(t) = \omega t + w_0. \quad (42.5)$$

На рис. 60 показаны фазовые траектории в исходных переменных  $x, p$ , имеющее вид эллипсов, и прямолинейные фазовые траектории в переменных действие–угол  $I, w$ .

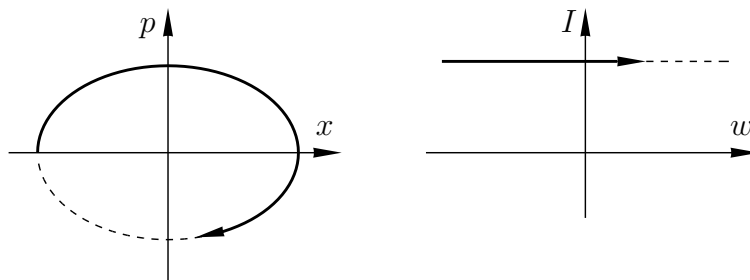


Рис. 60. Фазовые траектория гармонического осциллятора в исходных переменных  $p, x$  и в переменных действие–угол  $I, w$

Перейдем теперь к общему случаю одномерного движения. В этом случае вопрос о разделении переменных тривиален. Из равенства

$$H(p, q) = E \quad (42.6)$$

выразим  $p = p(q, E)$  и найдём укороченное действие

$$S_0(q, E) = \int_{q_0}^q p(q, E) dq. \quad (42.7)$$

Определим величину  $I$  как

$$I(E) = \frac{1}{2\pi} \oint p(q, E) dq, \quad (42.8)$$

где интеграл берется по периоду движения (имея в виду, например, маятник, можно представлять себе, что в зависимости от энергии период движения есть либо период

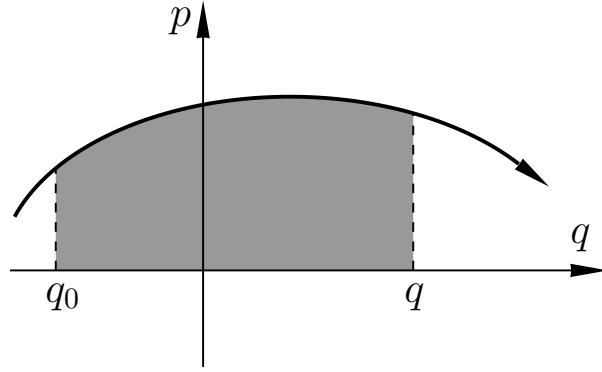


Рис. 61. Геометрический смысл укороченного действия — выделенная площадь на фазовой плоскости

колебания, либо период полного обращения маятника). Наглядный смысл величины  $S_0(q, E)$  — площадь на фазовой плоскости, отмеченная на рис. 61, а величина  $2\pi I$  соответствует площади, ограниченной фазовой траекторией за период движения. Отметим, что укороченное действие является неоднозначной функцией координаты, вырастая за период на величину  $2\pi I$ , так что после  $n$  периодов движения приращение

$$\Delta S_0 = 2\pi n I. \quad (42.9)$$

Выразив из (8)  $E(I)$  и подставив в (7), получим функцию

$$\Phi(q, I) = S_0(q, E(I)). \quad (42.10)$$

Её и примем за производящую функцию канонического преобразования, в котором  $I$  — новый импульс<sup>17</sup>. Связь новых канонических переменных со старыми определяется соотношениями вида (36.16):

$$p = \frac{\partial \Phi(q, I)}{\partial q}, \quad w = \frac{\partial \Phi(q, I)}{\partial I}. \quad (42.12)$$

Новый гамильтониан фактически уже известен, он не зависит от координаты  $w$ :

$$H'(I, w) = E(I). \quad (42.13)$$

Уравнения Гамильтона

$$\dot{I} = -\frac{\partial H'}{\partial w} = -\frac{\partial E}{\partial w} = 0, \quad \dot{w} = \frac{\partial H'}{\partial I} \quad (42.14)$$

<sup>17</sup>В рассмотренном примере гармонического осциллятора импульс  $p(x, E) = \sqrt{2mE - (m\omega x)^2}$ , укороченное действие

$$S_0(x, E) = \int_{x_0}^x p(x, E) dx = \frac{1}{2}x\sqrt{2mE - (m\omega x)^2} + \frac{E}{\omega} \arcsin\left(\sqrt{\frac{m}{2E}}\omega x\right) + 2\pi n \frac{E}{\omega} + \text{const}.$$

Отсюда производящая функция

$$\Phi(x, I) = \frac{1}{2}x\sqrt{2m\omega I - (m\omega x)^2} + I \arcsin\left(\sqrt{\frac{m}{2\omega I}}\omega x\right) + 2\pi n I + \text{const}. \quad (42.11)$$

приводят к закону движения для новых переменных

$$I = \text{const}, \quad w = \frac{\partial E}{\partial I} t + w_0. \quad (42.15)$$

Величину  $\partial E/\partial I$  находим с помощью (8):

$$\frac{\partial I}{\partial E} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial p(q, E)}{\partial E} dq. \quad (42.16)$$

Чтобы найти производную  $\partial p(q, E)/\partial E$ , подставим  $p = p(q, E)$  в уравнение (6) и, продифференцировав полученное тождество  $H(p(q, E), q) = E$  по  $E$ , получим

$$\frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial E} = 1,$$

откуда

$$\frac{\partial p}{\partial E} = \frac{1}{\partial H/\partial p} = \frac{1}{\dot{q}}, \quad (42.17)$$

так что

$$\frac{\partial I}{\partial E} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{dq}{\dot{q}} = \frac{T}{2\pi} = \frac{1}{\omega}, \quad (42.18)$$

где  $T = 2\pi/\omega$  — период движения, а  $\omega$  — частота. В общем случае частота  $\omega$  зависит от энергии, т. е. от  $I$ . Итак,

$$I = \text{const}, \quad w = \omega(I) t + w_0. \quad (42.19)$$

Угловая переменная  $w$  так же, как и укороченное действие, является неоднозначной функцией координаты  $q$ . За период движения переменная  $w$  увеличивается на  $2\pi$  (ср. (9)). Переменные  $q$  и  $p$  — периодические функции  $w$ .

## 42.2. Системы со многими степенями свободы

Для системы со многими степенями свободы и функцией Гамильтона, не зависящей явно от времени ( $\partial H/\partial t = 0$ ), можно ввести переменные действия и угловые переменные в случае, если переменные разделяются. Действуем вполне аналогично, но заменяем в (7) функцию  $S_0$  на  $S_i$  из (41.7). При этом каждая из переменных  $I_i$  оказывается функцией  $s$  произвольных постоянных  $\alpha_j$ , в том числе и энергии  $E$ . Новая функция Гамильтона есть

$$H' = E(I_1, \dots, I_s), \quad (42.19)$$

а пары канонически сопряженных координат и импульсов  $q_i, p_i$  — функции “своих”  $w_i$  и всех переменных  $I_j$ . Параметры  $\alpha_i$  также могут быть выражены через  $I_j$ :

$$\alpha_i = \alpha_i(I_1, \dots, I_s). \quad (42.20)$$

Переменные  $I_i$  играют особую роль при переходе к квантовой механике. В так называемом квазиклассическом приближении они могут принимать лишь дискретный ряд значений (правила квантования Бора–Зоммерфельда):

$$I_i = n_i \hbar$$

(здесь  $n_i$  — целые числа, а  $\hbar$  — постоянная Планка или квант действия).

### 42.3. Функция Гамильтона, зависящая явно от времени

Пусть теперь функция Гамильтона механической системы с одной степенью свободы зависит от параметра  $\lambda = \lambda(t)$ , изменяющегося со временем. При этом функция Гамильтона  $H = H(p, q, \lambda)$  приобретает явную зависимость от времени через этот параметр, а энергия системы  $E$  не сохраняется. Переход к каноническим переменным  $w, I$  в этом случае проводится по тем же формулам (8)–(10), (12), в которых, однако, теперь появится параметр  $\lambda$ . В частности, импульс  $p = p(q, E, \lambda)$  находится из уравнения

$$H(p, q, \lambda) = E \quad (42.21)$$

при фиксированном значении  $\lambda$ . После этого определяется укороченное действие  $S_0(q, E, \lambda)$  и производящая функция  $\Phi(q, I, \lambda)$ .

Новая функция Гамильтона согласно (36.16) равна

$$H'(I, w, \lambda) = E(I, \lambda) + \frac{\partial \Phi(q, I, \lambda)}{\partial t} = E(I, \lambda) + \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi(q, I, \lambda)}{\partial \lambda}. \quad (42.22)$$

В этом выражении переменная  $q$  в функции  $\partial \Phi(q, I, \lambda)/\partial \lambda$  должна быть заменена на  $q = q(w, I)$ , найденное из равенств (12). Обозначим полученную таким образом функцию через

$$\Lambda(I, w, \lambda) = \left. \frac{\partial \Phi(q, I, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{q=q(w, I)}. \quad (42.23)$$

Отметим сразу же, что функция  $\Lambda(I, w, \lambda)$  является (в отличие от  $\Phi(q, I, \lambda)$ ) однозначной функцией переменной  $w$ <sup>18</sup>. Действительно, дифференцирование функции  $\Phi(q, I, \lambda)$  по  $\lambda$  совершается при фиксированном значении  $I$ , поэтому добавка  $2\pi I$ , возникающая после каждого периода колебаний (см. формулы (9), (10)), исчезает.

Окончательно получаем новую функцию Гамильтона

$$H'(I, w, \lambda) = E(I, \lambda) + \dot{\lambda} \Lambda(I, w, \lambda) \quad (42.24)$$

и уравнения Гамильтона для новых переменных (ср. (14), (18))

$$\dot{I} = -\dot{\lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial w}, \quad \dot{w} = \omega + \dot{\lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial I}. \quad (42.25)$$

Эти уравнения удобны для построения теории возмущений в случае, когда величина  $\dot{\lambda}$  оказывается малой (см. § 43.3).

**Пример.** Гармонический осциллятор с частотой, зависящей от времени:

$$H(p, x, \omega) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2(t) x^2. \quad (42.26)$$

В этом случае параметром  $\lambda$  является частота  $\omega = \omega(t)$ . Производящая функция  $\Phi(q, I, \lambda)$  и связь старых и новых переменных определяются прежними формулами (11) и (2), в которых, однако, величина  $\omega$  зависит от времени. Новая функция Гамильтона согласно (22)–(24) равна

$$H'(I, w, \omega) = \omega I + \dot{\omega} \frac{\partial \Phi(q, I, \omega)}{\partial \omega} = \omega I + \frac{\dot{\omega}}{2\omega} \sqrt{2m\omega I - (m\omega x)^2} =$$

<sup>18</sup>Если параметр  $\lambda$  не изменяется с течением времени, то движение системы является периодическим и однозначная функция  $\Lambda(I, w, \lambda)$  является периодической функцией переменной  $w$ .

$$= \omega I + \frac{\dot{\omega}}{2\omega} I \sin 2w, \quad (42.27)$$

а уравнения движения таковы

$$\dot{I} = -\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} I \cos 2w, \quad \dot{w} = \omega(t) + \frac{\dot{\omega}(t)}{2\omega(t)} \sin 2w. \quad (42.28)$$

Если частота изменяется медленно и плавно, то правая часть уравнения для действия дополнительно мала из-за того, что при малом параметре  $\dot{\omega}(t)$  стоит осциллирующий множитель  $\cos 2w$ . Поэтому при усреднении за период движения правая часть исчезает, т. е. действие в среднем сохраняется (подробнее см. [3, задача 13.10]).

## § 43. Адиабатические инварианты

### 43.1. Постановка задачи и результат

Пусть механическая система с одной степенью свободы совершает колебания в условиях, когда её параметр  $\lambda$  *адиабатически медленно* изменяется. Слова “адиабатически медленно” означают, что изменение этого параметра происходит медленно и плавно. Иными словами, изменение этого параметра  $\sim \dot{\lambda} T$  за период колебания  $T$  мало по сравнению с самим параметром  $\lambda$ , а также скорость этого изменения  $\ddot{\lambda}$  мала по сравнению с  $\dot{\lambda}/T$ :

$$\dot{\lambda} T \ll \lambda, \quad \ddot{\lambda} T \ll \dot{\lambda}. \quad (43.1)$$

Пусть  $H(p, q, \lambda)$  — гамильтониан такой системы. Если параметр  $\lambda$  постоянен, то энергия  $E$  сохраняется, траектория на фазовой плоскости является замкнутой и определяется уравнением

$$H(p, q, \lambda) = E. \quad (43.2)$$

Пусть  $p = p(q, E, \lambda)$  — решение этого уравнения, тогда площадь, охватываемая на фазовой плоскости этой траекторией равна

$$S(E, \lambda) = \oint p(q, E, \lambda) dq. \quad (43.3)$$

Если же параметр  $\lambda$  медленно изменяется, то энергия  $E$  уже не является сохраняющейся величиной, её среднее за период значение

$$\langle E \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt \quad (43.4)$$

медленно изменяется и это изменение существенно определяется изменением параметра  $\lambda(t)$ . Оказывается, из величин  $E$  и  $\lambda$  можно образовать такую комбинацию — функцию  $E(t)$  и  $\lambda(t)$ , среднее за период значение которой остается постоянной. Такую комбинацию называют *адиабатическим инвариантом*. Забегая вперёд, укажем, что адиабатическим инвариантом является каноническая переменная действие  $I$ . Напомним, что эта величина с точностью до множителя совпадает с площадью, охватываемой фазовой траекторией,  $S(E, \lambda) = 2\pi I(E, \lambda)$  и вычисленной при заданных (зафиксированных в текущий момент времени) значениях  $E$  и  $\lambda$ :

$$I(E, \lambda) = \frac{S(E, \lambda)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \oint p(q, E, \lambda) dq. \quad (43.5)$$

Мы покажем в § 43.3, что

$$\langle I(E, \lambda) \rangle = \text{const} \quad (43.6)$$

с точностью до величин порядка  $\dot{\lambda}T$  включительно. Здесь мы приведём качественные соображения, основанные на теореме Лиувилля. Пусть параметр  $\lambda(t)$  в начальный момент имеет значение  $\lambda$  и ему соответствует начальная энергия  $E$ . При фиксированном значении этого параметра (и энергии) фазовая траектория замкнута и ограничивает фазовую область площадью  $S$ . Заметим, что энергии отдельных точек внутри этой области отличны от  $E$ . Рассмотрим поведение точек внутри и на границе этой области при движении системы для случая произвольного изменения параметра  $\lambda(t)$ . Мы можем утверждать на основе теоремы Лиувилля, что площадь этой области сохранится. Однако точки, соответствующие границе этой области и представляющие собой вначале фазовую траекторию с энергией  $E$ , перестанут, вообще говоря, иметь одну и ту же энергию, т. е. перестанут быть фазовой траекторией. Если же параметр  $\lambda(t)$  изменяется адиабатически медленно, то все точки первоначальной фазовой траектории могут оставаться точками фазовой траектории для новой энергии  $E'$ , соответствующей новому значению параметра  $\lambda'$ . Тогда можно утверждать, что адиабатический инвариант сохраняется.

Для иллюстрации введенных понятий приведём два характерных примера.

**Пример 1.** В качестве первого примера рассмотрим гармонический осциллятор с медленно изменяющейся частотой (42.26). Условие (1) в данном случае означает, что

$$\dot{\omega} \ll \omega^2, \quad \ddot{\omega} \ll \dot{\omega}\omega. \quad (43.7)$$

Фазовая траектория гармонического осциллятора — эллипс, задаваемый уравнением  $H(p, x, \omega) = E$  с полуосями  $\sqrt{2mE}$  и  $\sqrt{2E/(m\omega^2)}$  и площадью  $S = 2\pi E/\omega$ . Адиабатический инвариант равен (ср. (42.3))

$$I = \frac{S}{2\pi} = \frac{E}{\omega}. \quad (43.8)$$

Таким образом, энергия гармонического осциллятора изменяется прямо пропорционально его частоте.

**Пример 2.** В качестве второго примера рассмотрим частицу в прямоугольном потенциальном ящике, ширина которого  $l(t)$  медленно изменяется (см. рис. 62, на котором упругая стенка в точке  $x = 0$  неподвижна, а упругая стенка в точке  $x = l(t)$

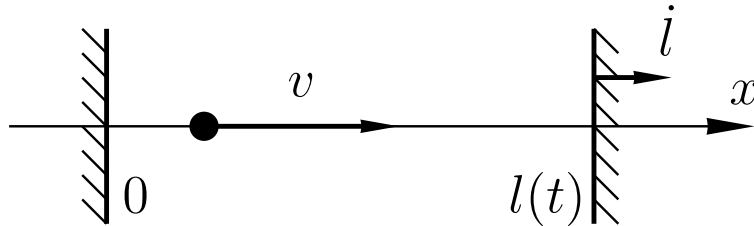


Рис. 62. Частица между неподвижной и медленно удаляющейся стенками

медленно удаляется). Период колебаний  $T = 2l/v$ , где  $v = |\dot{x}|$  — модуль скорости частицы. Условие (1) в данном случае означает, что

$$\dot{l} \ll v, \quad \ddot{l} \ll \dot{l}v. \quad (43.9)$$



Фазовая траектория этой системы — прямоугольник со сторонами  $l$  и  $2mv = 2\sqrt{2mE}$  (рис. 63), поэтому адиабатический инвариант равен

$$I = \frac{m}{\pi} v l = \frac{\sqrt{2m}}{\pi} \sqrt{E} l. \quad (43.10)$$

Таким образом, энергия частицы в таком ящике  $E \propto 1/l^2$ .

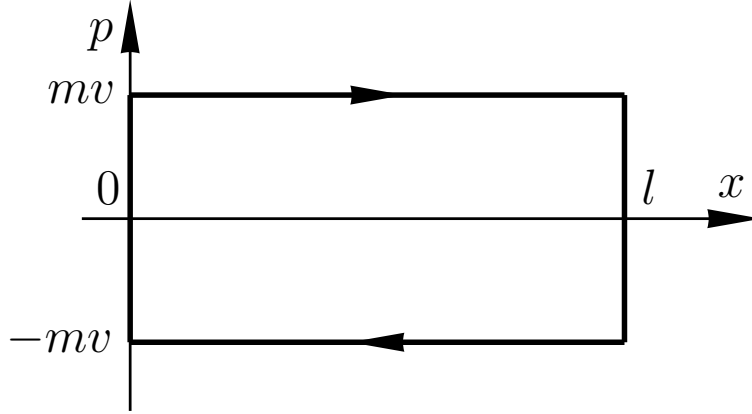


Рис. 63. Фазовая траектория системы, изображённой на рис. 62

Рассматриваемый пример имеет отношение к адиабатическим процессам в газах (см. [3, задача 13.13]) и к адиабатическому приближению в теории молекул (см. модельную задачу 13.9 из [3]).

Перед тем как перейти к доказательству результата (6), рассмотрим подробнее простой пример 2, в котором удобно продемонстрировать, как фактически зависят рассматриваемые величины от времени.

### 43.2. Адиабатический инвариант для частицы в ящике

При столкновении частицы с неподвижной стенкой её скорость не изменяется по величине, а при столкновении с удаляющейся стенкой её скорость уменьшается по величине на  $2\dot{l}$ . Выберем такое время  $\Delta t$ , что

$$\frac{2l}{v} \ll \Delta t \ll \frac{l}{\dot{l}}.$$

Такое  $\Delta t$  существует в силу условия медленности (9). За это время произойдет  $v\Delta t/(2l)$  пар столкновений со стенками и скорость изменится на

$$\Delta v = -v\dot{l} \frac{\Delta t}{l}.$$

Величины  $\Delta v$  и  $\Delta t$  малы, поэтому их отношение можно рассматривать как ускорение  $\Delta v/\Delta t = dv/dt$ . Интегрируя полученное уравнение, находим ответ (10):  $vl = \text{const}$ .

Интересно проследить подробнее как изменяется произведение  $vl$ . Это легко сделать, воспользовавшись графиками  $l(t)$  и  $v(t)$  (рис. 64, а, б). График произведения

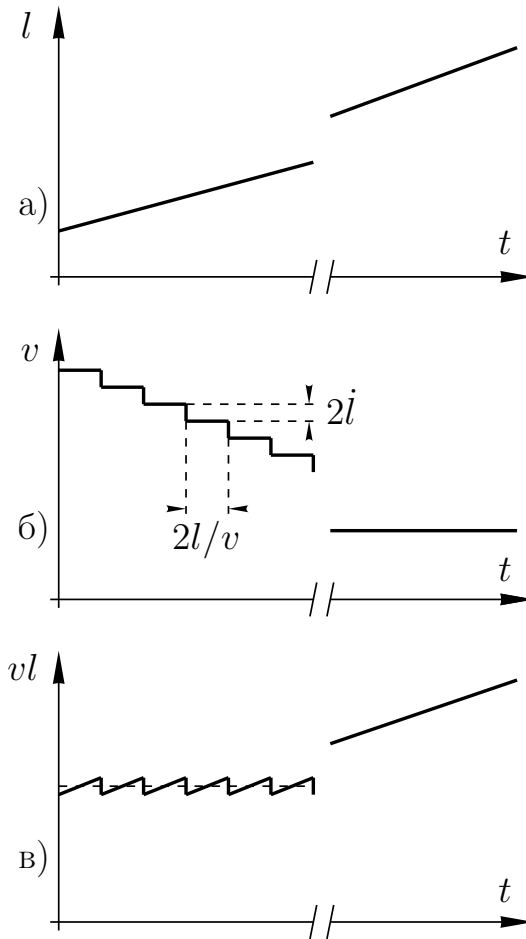


Рис. 64. Изменение величин  $l$ ,  $v$ ,  $vl$  с течением времени для системы, изображённой на рис. 62

$vl$  представлен на рис. 64, в. Величина  $vl$  колеблется около приблизительно постоянного значения  $\langle vl \rangle$ , причем амплитуда колебаний имеет относительную величину  $\sim \dot{l}/v$ . Отклонение  $\langle vl \rangle$  от постоянной имеет высший порядок малости

$$\frac{d}{dt} \langle vl \rangle \sim \dot{l}^2.$$

С увеличением параметра  $l$  скорость частицы уменьшается и наступит такой момент, что частица уже не сможет догнать удаляющуюся стенку. После этого момента времени скорость частицы остается постоянной, а величина  $vl$  — растёт. Нарушение условия адиабатичности (9) произойдёт ещё до этого.

### 43.3. Сохранение адиабатического инварианта

Докажем соотношение (6). Каноническая переменная  $I$  удовлетворяет уравнению (42.25)

$$\dot{I} = -\dot{\lambda} \frac{\partial \Lambda(I, w, \lambda)}{\partial w}. \quad (43.11)$$

Правая часть этого уравнения содержит малый параметр  $\dot{\lambda}$ , поэтому можно решать это уравнение с помощью метода последовательных приближений. А именно, имея в виду интервал времени порядка периода колебаний, в функцию  $\partial\Lambda(I, w, \lambda)/\partial w$ , стоящую при этом малым множителем, можно подставить ее переменные в нулевом по  $\dot{\lambda}$  приближении (42.19):

$$I = \text{const}, \quad w = \omega t + \omega_0, \quad \lambda = \text{const}.$$

В таком приближении

$$\frac{\partial\Lambda(I, w, \lambda)}{\partial w} = \frac{1}{\omega} \frac{d\Lambda}{dt}$$

и потому уравнение (11) можно переписать в виде

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\dot{\lambda}}{\omega} \frac{d\Lambda}{dt}. \quad (43.12)$$

Учитывая также, что  $\ddot{\lambda}T \ll \dot{\lambda}$ , можно считать в пределах периода  $\dot{\lambda} = \text{const}$ . Интегрируя уравнение (11) по периоду движения, имеем

$$I(t+T) - I(t) = -\frac{\dot{\lambda}}{\omega} [\Lambda(t+T) - \Lambda(t)] = 0, \quad (43.13)$$

так как в рассматриваемом приближении функция  $\Lambda$  является периодической (см. сноску 18 на с. 142). В пределах периода адиабатический инвариант  $I(t)$  изменяется на величину порядка  $\dot{\lambda}T\Lambda$ , но через период возвращается к своему исходному значению. Отсюда следует, что адиабатический инвариант осциллирует с малой амплитудой около постоянного значения, не удаляясь от него в течение многих периодов. Такая зависимость  $I(t)$  хорошо видна на рис. 64 (напомним, что в этом случае  $I = mv_l/\pi$ ).

Заметим, что в ряде случаев точность сохранения адиабатического инварианта может оказаться гораздо более высокой — см. [1, § 51].

## Задачи

**43.1.** Найти связь между объёмом и давлением “газа”, состоящего из частиц, которые движутся внутри куба, размер которого медленно изменяется.

**43.2.** Шарик массы  $m$  движется между тяжёлым поршнем массы  $M \gg m$  и дном цилиндра. Равновесное расстояние от поршня до дна цилиндра равно  $h$ . Считая, что скорость шарика гораздо больше скорости поршня, определить закон движения поршня, усреднённый по “периоду” движения шарика. Найти частоту малых колебаний поршня. Соударения считать упругими.

**43.3.** Рассматриваются малые колебания маятника в поле тяжести. Длина маятника медленно увеличивается в 2 раза. Найти, как изменится максимальный угол отклонения маятника.

**43.4.** Найти период колебаний электрона вдоль оси в магнитной ловушке. Магнитное поле ловушки симметрично относительно оси  $z$ , причем

$$B_\varphi = 0, \quad B_z = B_z(z), \quad B_r = -\frac{r}{2} B'_z(z)$$

и

$$B_z(z) = B_0 \left( 1 + \frac{z^2}{a^2} \right).$$

## § 44. Движение системы со многими степенями свободы. Динамический хаос

Движение системы со многими степенями свободы, в отличие от одномерного случая, не может быть исследовано исчерпывающим образом. Его естественно рассматривать в  $2s$ -мерном фазовом пространстве с координатами  $q, p$ . Особый интерес представляет описание финитного движения системы в течение неограниченного времени.

Движение многомерных систем очень разнообразно. Для систем с разделяющимися переменными справедливо утверждение, что все  $s$  переменных действия являются интегралами движения:

$$I_i(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s) = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (44.1)$$

поэтому в фазовом пространстве движение такой системы происходит по  $s$ -мерной поверхности, определяемой уравнениями (1). Вообще говоря, точка, изображающая движение системы, проходит как угодно близко к любой точке данной поверхности. Это становится очевидным, если перейти в фазовом пространстве к переменным действие–угол. Проекция фазовой траектории на плоскость  $w_1, w_2$  изображена на рис. 65. Поскольку  $q_i, p_i$  являются периодическими функциями  $w_i$ , достаточно рассматривать изменение угловых переменных в пределах  $0 \leq w_i \leq 2\pi$ . На плоскости  $w_1, w_2$  фазовая траектория размещается в пределах квадрата, причем его противоположные стороны должны быть отождествлены (“склеены”) друг с другом.

Если отношение  $\omega_1/\omega_2$  — число иррациональное (общий случай!), то фазовая траектория плотно заполняет весь квадрат. В пространстве  $q, p$  фазовая траектория заполняет  $s$ -мерную поверхность “тора”. Такое движение называется *условно-периодическим*.

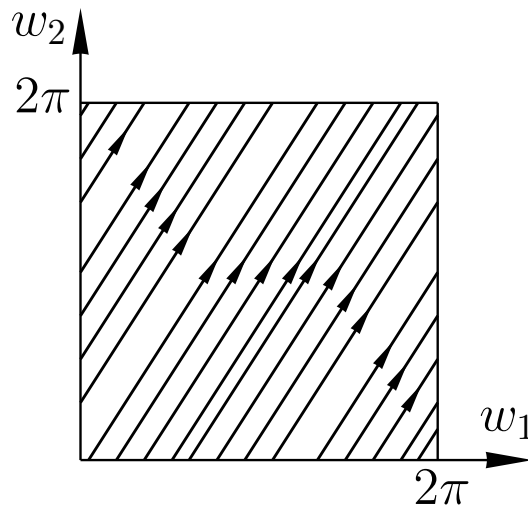


Рис. 65. Фазовая траектория на плоскости  $w_1, w_2$

Если какие-либо из отношений  $\omega_i/\omega_j$  оказываются рациональными числами, то проекция фазовой траектории на плоскость  $w_i, w_j$  становится замкнутой кривой и размерность области, заполняемой ею в фазовом пространстве, уменьшается.

В общем случае переменные в уравнении Гамильтона–Якоби не разделяются и фазовая траектория заполняет область большей размерности. “Гарантирован” (при  $\partial H/\partial t = 0$ ) лишь один интеграл уравнений движения  $H(q, p) = E$ , так что это область  $2s - 1$ -измерений (мы в нашем курсе далеки от доказательства этого факта). Таким образом, невозможность разделения переменных обусловлена (в общем случае) не нашим неумением найти подходящие криволинейные координаты, а самим характером движения системы.

Оказывается, что движение системы, лишь немного отличающейся от системы с разделяющимися переменными, может быть исследовано методами последовательных приближений. Для небольшого отрезка времени такая задача решается относительно легко. Однако с увеличением рассматриваемого интервала времени задача сильно усложняется из-за возникновения так называемых резонансных явлений.

Рассмотрим пример, в некотором отношении противоположный случаю условно-периодического движения. Пусть большое число шаров, движущихся без трения по плоскому ограниченному столу, абсолютно упруго сталкиваются друг с другом и со стенками. Едва ли можно наблюдать такой “газ” где-нибудь, кроме экрана дисплея. Тем не менее это хорошая модель настоящего газа.

Законы движения шаров очень просты и формально вся фазовая траектория системы большого числа шаров определяется ее начальной точкой, т. е. начальными координатами и импульсами шаров. Посмотрим, как изменится фазовая траектория, если направление движения одного из шаров в начальный момент времени изменить на угол  $\varphi_0 \sim 10^{-8}$ . Такое движение будем называть возмущённым. Исследуем, как будет изменяться угол отклонения при столкновениях. При этом ограничимся самыми грубыми оценками. Будем иметь в виду, что средний путь шара между столкновениями  $l$  много больше радиуса шара  $a$ , т. е.  $l \gg a$ . За время до очередного столкновения шар движется по прямой и центр его сместится от невозмущённого положения на расстояние  $OO' \sim l\varphi_0$  (рис. 66). Того же порядка и смещение точки соприкосновения шаров при ударе.

$$AA' \sim \frac{1}{2} OO' \sim l\varphi_0, \quad \alpha \sim \frac{AA'}{a}, \quad \varphi_1 \sim \alpha \sim \frac{l}{a} \varphi_0.$$

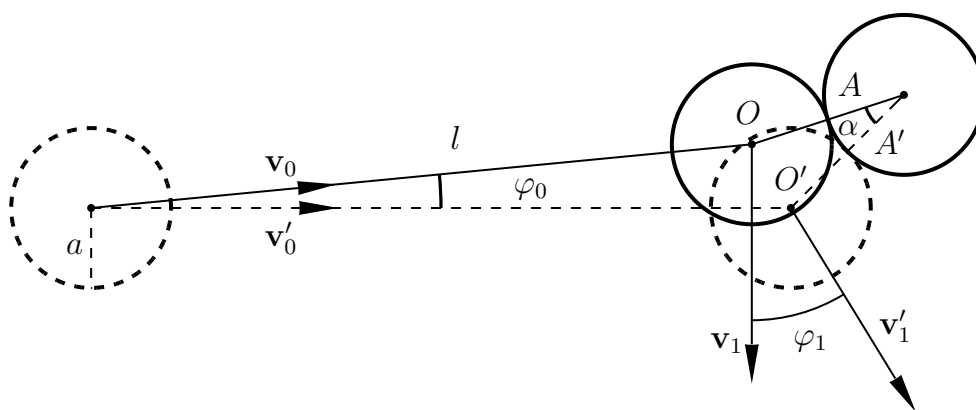


Рис. 66. Упругое соударение шаров

Участок поверхности второго шара в окрестности точки касания играет при ударе роль “зеркала”. Это “зеркало” само двигалось до удара, при ударе оно отскакивает,

поэтому направление, в каком отскакивает наш шар, не определяется правилом “угол падения равен углу отражения”. Тем не менее поворот “зеркала” на малый угол  $\alpha$  ведет к изменению направления движения отскочившего шара на угол  $\varphi_1 \sim \alpha$  (может быть в полтора-два раза больше или меньше — такой уровень точности в данном случае нас устраивает). Так как

$$\varphi_1 \sim \frac{l}{a} \varphi_0 \gg \varphi_0,$$

то при ударе отклонение резко возрастает. После  $k$  столкновений отклонение

$$\varphi_k \sim \left(\frac{l}{a}\right)^k \varphi_0.$$

Возмущение угла отклонения пробного шара растет экспоненциально со временем. Если  $l/a \sim 10$ , то достаточно  $k \sim 8 \div 10$  столкновений, чтобы стало  $\varphi_1 \sim 1$  и возмущенное направление движения шара перестало иметь какое бы то ни было отношение к невозмущенному. Оказывается, что рост возмущения переносится на все шары, фазовая траектория возмущенного движения экспоненциально удаляется от фазовой траектории невозмущенного и именно вследствие этого разбегания устанавливается распределение Максвелла по скоростям.

Такое различие в поведении условно-периодических систем и поведении системы соударяющихся шаров приводит к качественному различию содержания численного моделирования этих систем.

Примером слабозвозмущенной условно-периодической системы служит Солнечная система, в которой почти эллиптические траектории планет, возмущенные притяжением между ними, тем не менее с хорошей точностью рассчитываются на тысячелетия как вперед так и назад по времени (что позволяет, например, “предсказывать” затмения, наблюдавшиеся в древности).

Предсказание же с помощью компьютера координат и скоростей сталкивающихся шаров через сколько-нибудь значительное время принципиально невозможно. Неизбежные неточность задания начальных данных и ошибки округления при вычислениях экспоненциально нарастают, и, чтобы предвидеть движение шаров спустя 100 соударений, согласно сделанной оценке нужно было бы задать их начальные скорости с фантастической точностью  $\sim 100$  знаков.

Если мы все же представим себе, что вычисления ведёт какой-то сверхкомпьютер, справляющийся с любым числом знаков, все равно придется признать, что движение спустя большой (но не очень!) промежуток времени “контролируется” все более далёкими знаками после запятой в начальных условиях. Иначе говоря, с обычной точки зрения, это движение оказывается случайным.

Но при этом максвелловское распределение по скоростям прекрасно устанавливается. Уже при нескольких шарах можно видеть возникновение “молекулярного хаоса”, получать функции распределения по скоростям и т. д.

Легко понять, что вывод о катастрофическом росте неопределённостей координат относится и к системе большого числа шаров. Относится он и к движению молекул настоящего газа. Только для молекул неопределённости возникают из-за всяческих возмущений, которыми во всех других отношениях можно пренебречь, а для наших шаров — из-за ограниченности точности расчетов. Таким образом, движение

шаров (и молекул) является вполне закономерным в относительно малые промежутки времени и случайным — за долгий промежуток. Отметим, что эта случайность реализуется в рамках закона сохранения энергии.

Приведем еще один пример, иллюстрирующий, как движение приобретает фактически случайный характер. Пусть шарик движется в поле тяжести по поверхности двух вытянутых эллипсоидальных “корыт”, соединенных очень узким перешейком — “перевалом”. Такой шарик очень долго движется в одном “корыте” и лишь изредка переваливает в другое, причем маленькое отклонение направления движения может очень сильно изменить моменты перехода в другое “корыто” и обратно.

В заключение необходимо сказать, что вопрос о возникновении случайности в движении, формально строго определенном, лежит в интенсивно развиваемой в настоящее время области физики.

Более того, представление о том, что возникновение хаотического движения при полной, казалось бы, определенности начальных условий является скорее правилом, чем исключением, проникло уже в другие области науки и в философию.





# Глава V

## ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

В настоящей главе под *твёрдым телом* мы будем подразумевать *совокупность материальных точек, расстояния между которыми не изменяются в процессе движения*. Это означает, что мы пренебрегаем всеми видами деформации твёрдого тела, во многих случаях такое пренебрежение вполне разумно. Отметим также, что такое приближение возможно лишь в нерелятивистской механике (существование “абсолютно твёрдого тела” противоречит теории относительности, потому, например, что с его помощью можно было бы передавать сигналы с произвольной скоростью).

### § 45. Кинематика твёрдого тела

Положение твёрдого тела в некоторой инерциальной системе координат  $XYZ$  можно задать следующим образом. Пусть к этому телу “прибита” система координат  $x = x_1, y = x_2, z = x_3$  с началом в точке  $O$  (рис. 67), мы будем называть эту систему координат “подвижной”. Тогда шесть величин — три координаты радиус-вектора  $\mathbf{R}$  точки  $O$  в инерциальной системе  $XYZ$  и три угла, которые задают ориентацию осей подвижной системы  $xuz$  относительно осей  $XYZ$ , — полностью определяют положение твёрдого тела.

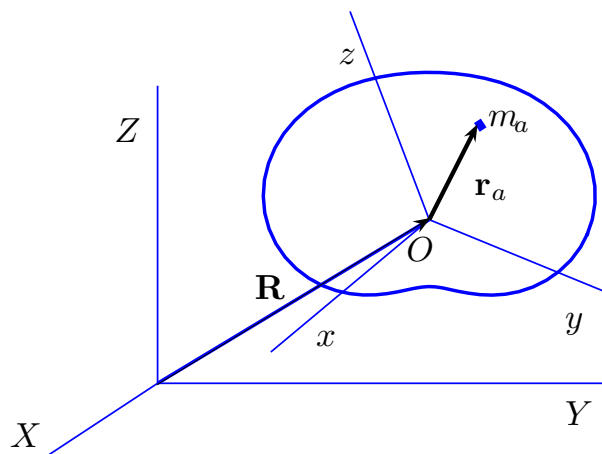


Рис. 67. Инерциальная система координат  $XYZ$  и “подвижная” система координат  $xuz$ , “прибитая” к твёрдому телу

Пусть твёрдое тело состоит из  $N$  материальных точек. Для каждой такой матери-

альной точки  $a = 1, 2, \dots, N$  с массой  $m_a$  и радиус-вектором  $\mathbf{r}_a$  в системе координат  $xuz$  её радиус-вектор в инерциальной системе есть

$$\mathbf{R} + \mathbf{r}_a.$$

Подчеркнем важный для дальнейшего факт, что *проекции  $x_a, y_a, z_a$  вектора  $\mathbf{r}_a$  на оси  $xuz$  подвижной системы координат не изменяются при движении твёрдого тела*, хотя сам вектор  $\mathbf{r}_a$  может изменять свое направление (но не длину!).

Произвольное движение твёрдого тела можно представить как совокупность двух простых движений — поступательного и вращательного. При *поступательном* движении изменяется вектор  $\mathbf{R}$ , а вектор  $\mathbf{r}_a$  не изменяет своего направления, так что любая линия, соединяющая две произвольные материальные точки данного твёрдого тела, остается параллельной самой себе при таком движении. В этом случае скорость  $\mathbf{v}_a$  любой материальной точки твёрдого тела совпадает со скоростью движения точки  $O$ , т. е.

$$\mathbf{v}_a = \dot{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{V}. \quad (45.1)$$

При *вращательном* движении, напротив, положение точки  $O$  не изменяется, а твёрдое тело вращается с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг направления, задаваемого единичным вектором  $\mathbf{n}$ . Удобно ввести вектор угловой скорости

$$\mathbf{\Omega} = \Omega \cdot \mathbf{n}.$$

Конечно, этот вектор зависит от времени  $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}(t)$ , поскольку как величина угловой скорости, так и направление вращения могут изменяться с течением времени. При вращательном движении твёрдого тела составляющие его материальные точки вращаются с угловой скоростью  $\Omega$  в плоскостях, перпендикулярных направлению  $\mathbf{n}$ , поэтому скорость  $a$ -й материальной точки равна (ср. § 17.2)

$$\mathbf{v}_a = [\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_a]. \quad (45.2)$$

Поясним эту простую формулу следующим формальным рассмотрением. Введём орты  $\mathbf{e}_i$  подвижной системы координат  $x_1x_2x_3$  со свойствами

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3.$$

Вектор  $\mathbf{r}_a$  можно представить в виде разложения по этим ортам:

$$\mathbf{r}_a = x_a \mathbf{e}_1 + y_a \mathbf{e}_2 + z_a \mathbf{e}_3. \quad (45.3)$$

При вращении твёрдого тела орты  $\mathbf{e}_i$  также вращаются с той же угловой скоростью  $\mathbf{\Omega}$ , так что

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = [\mathbf{\Omega}, \mathbf{e}_i]. \quad (45.4)$$

В то же время координаты  $x_a, y_a, z_a$  вектора  $\mathbf{r}_a$ , как отмечено выше, не изменяются при движении твёрдого тела. Поэтому при дифференцировании по времени соотношения (3) получаем результат (2).

Для дальнейшего полезно рассмотреть также производную по времени для произвольного зависящего от времени вектора  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ . Его разложение по указанным ортам

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 \quad (45.5)$$

содержит координаты  $A_1, A_2, A_3$ , зависящие, вообще говоря, от времени. Поэтому дифференцирование соотношения (5) приводит к другому результату:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_1}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dA_2}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{dA_3}{dt}\mathbf{e}_3 + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{A}]. \quad (45.6a)$$

Проецируя это уравнение на ось  $\mathbf{e}_i$ , получаем

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_i \equiv \mathbf{e}_i \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_i}{dt} + \sum_{j,k=1}^3 e_{ijk} \Omega_j A_k, \quad i = 1, 2, 3. \quad (45.6b)$$

Здесь  $e_{ijk}$  — полностью антисимметричный единичный тензор третьего ранга.

В случае, когда твёрдое тело движется произвольно, скорость  $a$ -й материальной точки равна

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_a]. \quad (45.7)$$

Начало подвижной системы координат  $xyz$ , т. е. точка  $O$ , может быть выбрана совершенно произвольно, в том числе и вне самого твёрдого тела. Покажем, однако, что *угловая скорость  $\boldsymbol{\Omega}$  не зависит от выбора точки  $O$* . Пусть начало отсчета смещено в точку  $O'$ , отстоящую на вектор  $\mathbf{B}$  от точки  $O$ , так что новый радиус-вектор  $\mathbf{r}'_a$  связан со старым радиус-вектором  $\mathbf{r}_a$  соотношением

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \mathbf{B}. \quad (45.8)$$

При этом скорость точки  $O'$  в согласии с (7) равна

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{B}]. \quad (45.9)$$

Для скорости  $\mathbf{v}_a$  материальной точки мы можем использовать два эквивалентных выражения — или формулу (7) в старых координатах или формулу

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{V}' + [\boldsymbol{\Omega}', \mathbf{r}'_a] \quad (45.10)$$

в новых координатах. Подставив (8) в формулу (7), получим соотношение

$$\mathbf{V}' + [\boldsymbol{\Omega}', \mathbf{r}'_a] = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{B}] + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}'_a],$$

из которого в силу (9) и произвольности вектора  $\mathbf{r}'_a$  следует равенство

$$\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\Omega},$$

т. е. независимость угловой скорости вращения твёрдого тела от выбора точки  $O$ .

Разложим скорость  $\mathbf{V}$  на составляющие  $\mathbf{V}_{\parallel}$  и  $\mathbf{V}_{\perp}$ , параллельные и перпендикулярные вектору угловой скорости  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  в данный момент времени. Сделаем то же самое и для скорости  $\mathbf{V}'$ , тогда из равенства (9) получим два соотношения:

$$\mathbf{V}'_{\parallel} = \mathbf{V}_{\parallel}, \quad \mathbf{V}'_{\perp} = \mathbf{V}_{\perp} + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{B}].$$

Если  $\mathbf{V}_{\parallel} = 0$ , то из этих формул следует, что можно найти такую точку  $O'$ , чтобы скорость  $\mathbf{V}'$  в данный момент времени была равна нулю. Иными словами, в этом случае существует возможность представить движение твёрдого тела как чистое вращение. Соответствующую ось вращения, проходящую через точку  $O'$ , при этом называют *мгновенной осью вращения тела*.

## § 46. Импульс, момент импульса и кинетическая энергия твёрдого тела

### 46.1. Импульс твёрдого тела

Импульс твёрдого тела равен сумме импульсов материальных точек данного тела:

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{v}_a. \quad (46.1a)$$

Подставив (45.7) и введя обозначения массы всего твёрдого тела и радиус-вектора его центра инерции

$$m = \sum_a m_a, \quad \mathbf{r}_{\text{ци}} = \frac{\sum_a m_a \mathbf{r}_a}{m}, \quad (46.2)$$

найдем

$$\mathbf{P} = m\mathbf{V} + m[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_{\text{ци}}]. \quad (46.1b)$$

Если начало отсчета подвижной системы координат  $xuz$  поместить в центр инерции твёрдого тела, так что  $\mathbf{r}_{\text{ци}} = 0$ , то *импульс твёрдого тела окажется равен импульсу материальной точки с массой  $m$  и скоростью, равной скорости движения центра инерции  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{ци}}$* :

$$\mathbf{P} = m\mathbf{V}_{\text{ци}}. \quad (46.3)$$

### 46.2. Момент импульса твёрдого тела

Момент импульса твёрдого тела равна сумме моментов импульса материальных точек данного тела, т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_{a=1}^N m_a [\mathbf{R} + \mathbf{r}_a, \mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_a]] = \\ &= m[\mathbf{R}, \mathbf{V}] + \sum_a m_a [\mathbf{r}_a, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_a]] + m[\mathbf{r}_{\text{ци}}, \mathbf{V}] + m[\mathbf{R}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_{\text{ци}}]]. \end{aligned} \quad (46.4)$$

Если начало отсчета системы координат  $xuz$  поместить в центр инерции твёрдого тела, то *момент импульса твёрдого тела окажется равен сумме момента импульса материальной точки с массой  $m$ , радиусом-вектором  $\mathbf{R}$  и скоростью, равной скорости движения центра инерции, и момента импульса, соответствующего вращению твёрдого тела относительно точки  $O$  с угловой скоростью  $\boldsymbol{\Omega}$* :

$$\mathbf{M} = m[\mathbf{R}, \mathbf{V}_{\text{ци}}] + \sum_a m_a [\mathbf{r}_a, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_a]]. \quad (46.5)$$

Рассмотрим более подробно случай, когда точка  $O$  покоится, так что

$$\mathbf{M} = \sum_a m_a [\mathbf{r}_a, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_a]]. \quad (46.6)$$

В этом случае компоненты момента импульса оказываются линейной формой компонент  $\Omega_j$  угловой скорости. Действительно, переписав

$$[\mathbf{r}_a, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_a]] = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}_a^2 - (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}_a) \mathbf{r}_a,$$

и спроецировав это равенство на оси подвижной системы координат  $x_1x_2x_3$ ,

$$[\mathbf{r}_a, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_a]] \cdot \mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^3 \{ \mathbf{r}_a^2 \delta_{ik} - (\mathbf{r}_a)_i (\mathbf{r}_a)_k \} \Omega_k,$$

представим компоненты момента импульса в виде

$$M_i = \sum_{k=1}^3 I_{ik} \Omega_k, \quad (46.7)$$

где коэффициенты  $I_{ik}$  образуют симметричный тензор второго ранга — так называемый *тензор моментов инерции твёрдого тела*:

$$I_{ik} = \sum_{a=1}^N m_a \{ \mathbf{r}_a^2 \delta_{ik} - (\mathbf{r}_a)_i (\mathbf{r}_a)_k \}, \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (46.8)$$

Подчеркнем, что угловая скорость и момент импульса, вообще говоря, зависят от времени, в то время как компоненты  $I_{ik}$  суть постоянные характеристики твёрдого тела. Свойства этого тензора рассмотрены в разделе 46.4. Из уравнения (7) видно, что в общем случае направления вектора  $\mathbf{M}$  и вектора  $\boldsymbol{\Omega}$  не совпадают.

### 46.3. Кинетическая энергия твёрдого тела

Кинетическая энергия твёрдого тела равна сумме кинетических энергий материальных точек данного тела, т. е.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{v}_a^2.$$

Подставив (45.7) и используя обозначения (2), найдём

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_a m_a [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_a]^2 + m \boldsymbol{\Omega} [\mathbf{r}_{\text{ци}}, \mathbf{V}].$$

Если начало отсчёта подвижной системы координат  $xuz$  поместить в центр инерции твёрдого тела, то *кинетическая энергия твёрдого тела окажется равной сумме кинетической энергии материальной точки с массой  $m$  и скоростью  $\mathbf{V}_{\text{ци}}$  и кинетической энергии вращения твёрдого тела*:

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{V}_{\text{ци}}^2 + \frac{1}{2} \sum_a m_a [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_a]^2. \quad (46.9)$$

Рассмотрим более подробно случай, когда точка  $O$  покоится, так что вся кинетическая энергия твёрдого тела является энергией вращения:

$$T = \frac{1}{2} \sum_a m_a [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_a]^2. \quad (46.10)$$

В этом случае энергия оказывается квадратичной формой компонент  $\Omega_j$  угловой скорости. Действительно, переписав

$$[\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_a]^2 = \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{r}_a^2 - (\mathbf{\Omega} \mathbf{r}_a)^2 = \sum_{i,k=1}^3 \{ \mathbf{r}_a^2 \delta_{ik} - (\mathbf{r}_a)_i (\mathbf{r}_a)_k \} \Omega_i \Omega_k,$$

представим кинетическую энергию в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 I_{ik} \Omega_i \Omega_k, \quad (46.11)$$

где коэффициенты квадратичной формы  $I_{ik}$  являются компонентами тензора моментов инерции твёрдого тела (8).

Кинетическая энергия поступательного движения твёрдого тела может быть представлена в виде скалярного произведения импульса тела и его скорости:

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{P} \mathbf{V}. \quad (46.12)$$

Аналогично, используя уравнения (7), можно переписать формулу (11) для кинетической энергии вращения твёрдого тела в виде скалярного произведения вектора момента импульса тела и вектора его угловой скорости:

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{M} \mathbf{\Omega}. \quad (46.13)$$

Так как  $T > 0$ , угол между векторами  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{\Omega}$  всегда меньше  $90^\circ$ .

#### 46.4. Тензор моментов инерции твёрдого тела

Диагональные элементы тензора моментов инерции определяются через квадраты расстояний материальных точек до соответствующей оси

$$I_{11} = \sum_a m_a (y_a^2 + z_a^2), \quad I_{22} = \sum_a m_a (x_a^2 + z_a^2), \quad I_{33} = \sum_a m_a (x_a^2 + y_a^2),$$

а недиагональные элементы — через произведения соответствующих координат

$$I_{12} = I_{21} = - \sum_a m_a x_a y_a, \quad I_{13} = I_{31} = - \sum_a m_a x_a z_a, \quad I_{23} = I_{32} = - \sum_a m_a y_a z_a.$$

Из этих определений видно, что сумма двух разных диагональных элементов тензора  $I_{ik}$  не меньше любого диагонального элемента, так

$$I_{11} + I_{22} = \sum_a m_a (x_a + y_a^2 + 2z_a^2) \geq \sum_a m_a (x_a^2 + y_a^2) = I_{33}.$$

Из этого же соотношения видно, что для плоского твёрдого тела (расположенного в плоскости  $xy$ ) имеет место равенство

$$I_{11} + I_{22} = I_{33}.$$

Пусть единичный вектор  $\mathbf{n}$  задает направление некоторой оси, а величина  $\rho_a$  обозначает расстояние от материальной точки  $a$  до этой оси. Определим *момент инерции* твёрдого тела относительно оси  $\mathbf{n}$  следующим образом

$$I_{\mathbf{n}} = \sum_a m_a \rho_a^2.$$

Легко видеть, что диагональные элементы тензора моментов инерции  $I_{11}$ ,  $I_{22}$  и  $I_{33}$  представляют собой моменты инерции относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно. С другой стороны, момент инерции относительно произвольной оси  $\mathbf{n}$  может быть выражен через компоненты тензора  $I_{ik}$  и вектора  $\mathbf{n}$ :

$$I_{\mathbf{n}} = \sum_{i,k=1}^3 I_{ik} n_i n_k.$$

Рассмотрим случай, когда начало  $O$  подвижной системы координат  $xuz$  помещено в центр инерции твёрдого тела, так что

$$\sum_a m_a \mathbf{r}_a = 0, \quad (46.14)$$

а точка  $O'$  (начало другой подвижной системы координат  $x'y'z'$ ) смещена на вектор  $\mathbf{B}$ . При этом между радиус-векторами  $\mathbf{r}_a$  и  $\mathbf{r}'_a$  материальной точки имеет место соотношение (45.8). Подставляя (45.8) в определение (8) и учитывая равенство (14), получим соотношение (которое иногда называется *теоремой Гюйгенса–Штейнера*)

$$I'_{ik} = I_{ik}^{\text{цн}} + m (\mathbf{B}^2 \delta_{ik} - B_i B_k). \quad (46.15)$$

Из этой формулы видно, что диагональные элементы тензора моментов инерции имеют наименьшее значение в системе центра инерции твёрдого тела.

Как всякий симметричный тензор, тензор моментов инерции может быть приведён к диагональной форме при подходящем выборе осей подвижной системы координат  $xuz$ . Специальный интерес представляет диагональная форма этого тензора в случае, когда начало отсчёта системы  $xuz$  помещено в центре инерции твёрдого тела. В этом случае диагональные элементы

$$I_1 \equiv I_{11}^{\text{цн}}, \quad I_2 \equiv I_{22}^{\text{цн}}, \quad I_3 \equiv I_{33}^{\text{цн}} \quad (46.16)$$

тензора  $I_{ik}^{\text{цн}}$  называются *главными моментами инерции* твёрдого тела, а соответствующие оси системы  $xuz$  — *главными осями инерции*.

#### Определения

Если у твёрдого тела главные моменты инерции одинаковы  $I_1 = I_2 = I_3$ , то такое тело называют *шаровым волчком*. Конечно, шаровым волчком является однородный шар радиуса  $R$ , у которого

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5} m R^2. \quad (46.17)$$

Однако шаровым волчком является также и однородный куб с длиной ребра  $a$ , у которого

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{1}{6} m a^2. \quad (46.18)$$

Если у твёрдого тела два главных момента инерции совпадают, например  $I_1 = I_2 \neq I_3$ , то такое тело называют *симметрическим волчком*. В качестве примера можно указать однородный эллипсоид вращения с полуосями  $a = b \neq c$ , у которого

$$I_1 = I_2 = \frac{m}{5}(a^2 + c^2), \quad I_3 = \frac{2}{5}ma^2. \quad (46.19)$$

Другой пример симметрического волчка — четыре точки с одинаковыми массами  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ , расположенные в вершинах квадрата и соединённые невесомыми стержнями длины  $a$ , в этом случае

$$I_1 = I_2 = m_1 a^2, \quad I_3 = 2m_1 a^2. \quad (46.20)$$

Если у твёрдого тела главные моменты инерции разные, то такое тело называют *асимметрическим волчком*.

## Задачи

**46.1.** В вершинах квадрата со стороной  $2a$  расположены массы  $m$  и  $M$  (рис. 68). Найти компоненты тензора моментов инерции относительно:

- осей  $xyz$ ;
- осей  $x'y'$ , совпадающих с диагоналями квадрата, и  $z$ .

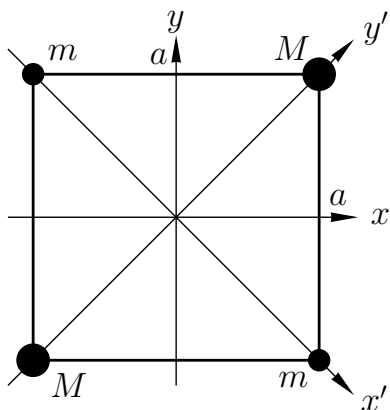


Рис. 68. К задаче 46.1

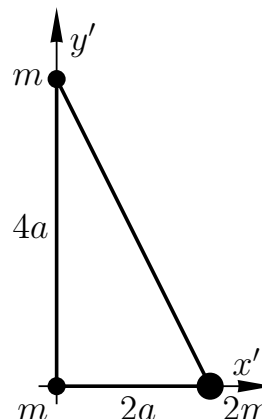


Рис. 69. К задаче 46.2

**46.2.** Найти главные оси инерции и главные моменты инерции системы, в которой частицы массы  $m$  и  $2m$  расположены в вершинах прямоугольного треугольника с катетами  $2a$  и  $4a$  (рис. 69).

## § 47. Уравнения движения твёрдого тела. Примеры

### 47.1. Уравнения движения твёрдого тела. Уравнения Эйлера

Начнем с уравнения для импульса твёрдого тела, стартуя от известного закона Ньютона для движения  $a$ -й материальной точки под действием силы  $\mathbf{f}_a$ :

$$\frac{d(m_a \mathbf{v}_a)}{dt} = \mathbf{f}_a.$$



Суммируя эти уравнения по всем материальным точкам твёрдого тела, получаем

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (47.1)$$

где  $\mathbf{P}$  — импульс твёрдого тела, определенный формулами (45.1)–(45.3), а

$$\mathbf{F} = \sum_a \mathbf{f}_a$$

— полная действующая на тело сила. Так как внутренние силы, действующие между материальными точками твёрдого тела, в силу третьего закона Ньютона взаимно скомпенсированы, то фактически сила  $\mathbf{F}$  есть полная внешняя сила, действующая на твёрдое тело. Проецируя уравнения (1) на оси подвижной системы координат  $x_1x_2x_3$  и используя (45.6), находим

$$\frac{dP_i}{dt} + \sum_{j,k=1}^3 e_{ijk} \Omega_j P_k = F_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (47.2)$$

Если начало отсчета подвижной системы координат  $x_1x_2x_3$  поместить в центр инерции твёрдого тела (см. (46.3)), то  $P_i = m(\mathbf{V}_{ци})_i$ .

Совершенно аналогично может быть получено уравнение для момента импульса твёрдого тела:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K}, \quad (47.3)$$

где  $\mathbf{M}$  — момент импульс твёрдого тела, определенный формулами (46.4)–(46.7), а

$$\mathbf{K} = \sum_a [\mathbf{r}_a, \mathbf{f}_a]$$

— полный действующий на тело момент сил (а так как внутренние моменты сил взаимно скомпенсированы, то фактически  $\mathbf{K}$  есть полный момент внешних сил, действующих на твёрдое тело). Проецируя уравнения (3) на оси подвижной системы координат  $x_1x_2x_3$  и используя (45.6), находим

$$\frac{dM_i}{dt} + \sum_{j,k=1}^3 e_{ijk} \Omega_j M_k = K_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (47.4)$$

Если начало отсчета подвижной системы координат  $x_1x_2x_3$  покоится, то (см. (46.7))

$$\frac{dM_i}{dt} = \sum_{k=1}^3 I_{ik} \frac{d\Omega_k}{dt}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (47.5)$$

Если же дополнительно оси системы  $x_1x_2x_3$  выбраны вдоль главных осей инерции, то уравнения (4) выглядят особенно просто (их называют *уравнениями Эйлера*)

$$I_i \frac{d\Omega_i}{dt} + \sum_{j,k=1}^3 e_{ijk} \Omega_j \Omega_k I_k = K_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (47.6)$$

Рассмотрим далее несколько примеров применения уравнений (3)–(6).

## 47.2. Свободное движение шарового и симметрического волчков

При свободном движении твёрдого тела  $\mathbf{F} = \mathbf{K} = 0$ , и потому импульс и момент импульса твёрдого тела сохраняются, а центр инерции движется с постоянной скоростью. Выберем инерциальную систему, в которой центр инерции покоится, и поместим начала отсчета инерциальной системы  $XYZ$  и подвижной системы  $xyz$  в центр инерции твёрдого тела.

У шарового волчка  $I_{ik} = I \delta_{ik}$ , поэтому из (46.7) следует

$$\mathbf{M} = I \boldsymbol{\Omega}. \quad (47.7)$$

Отсюда видно, что при свободном движении шарового волчка сохраняется не только момент импульса  $\mathbf{M}$ , но и сонаправленный с ним вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\Omega}$ .

Законов сохранения импульса и момента импульса достаточно и для определения свободного движения симметрического волчка. Ось  $x_3$  (её орт  $\mathbf{e}_3$ ) выберем вдоль оси симметрии волчка, тогда  $I_1 = I_2 \neq I_3$ , а

$$M_1 = I_1 \Omega_1, \quad M_2 = I_1 \Omega_2, \quad M_3 = I_3 \Omega_3. \quad (47.8)$$

В векторной форме эти уравнения можно представить в виде

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{I_1} (M_1 \mathbf{e}_1 + M_2 \mathbf{e}_2) + \frac{M_3}{I_3} \mathbf{e}_3,$$

или в виде

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\mathbf{M}}{I_1} + \left( \frac{M_3}{I_3} - \frac{M_3}{I_1} \right) \mathbf{e}_3. \quad (47.9)$$

Эта формула очень удобна для анализа движения волчка. Из нее следует, что три вектора  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\Omega}$  и  $\mathbf{e}_3$  всегда лежат в одной плоскости. В рассматриваемой инерциальной системе координат  $XYZ$  вектор  $\mathbf{M}$  неподвижен, а движение орта  $\mathbf{e}_3$  определяется уравнением (45.4), которое с учетом (9) гласит

$$\frac{d\mathbf{e}_3}{dt} = [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{e}_3] = \left[ \frac{\mathbf{M}}{I_1}, \mathbf{e}_3 \right]. \quad (47.10)$$

Иными словами, ось симметрии волчка вращается с постоянной угловой скоростью  $\mathbf{M}/I_1$  вокруг направления момента импульса. Конечно, при таком вращении проекция момента импульса на ось симметрии  $M_3$  остается неизменной, а вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\Omega}$  вращается с той же угловой скоростью что и ось симметрии.

Это означает, что три вектора  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\Omega}$  и  $\mathbf{e}_3$  не только всегда лежат в одной плоскости, но и сохраняют в этой плоскости неизменным взаимное расположение и свои длины. Отсюда следует, что в рассматриваемой инерциальной системе координат (в которой момент импульса неподвижен) вектора  $\boldsymbol{\Omega}$  и  $\mathbf{e}_3$  лежат в одной плоскости и вращаются по коническим поверхностям вокруг направления момента импульса (рис. 70) с одной и той же угловой скоростью. Такое движение волчка называется *регулярной прецессией*, а его угловая скорость — *скорость прецессии*  $\boldsymbol{\Omega}_{\text{пр}}$  — равна

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{пр}} = \frac{\mathbf{M}}{I_1}. \quad (47.11)$$

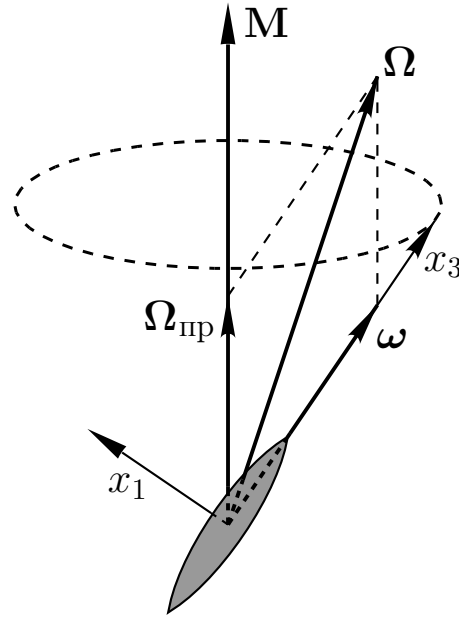


Рис. 70. Свободное движение симметрического волчка

Помимо регулярной прецессии, происходит, конечно, и вращение волчка вокруг вращающейся оси симметрии, называемое *собственным вращением* волчка. Соответствующая *угловая скорость собственного вращения* равна

$$\boldsymbol{\omega} = \left( \frac{M_3}{I_3} - \frac{M_3}{I_1} \right) \mathbf{e}_3 = \left( 1 - \frac{I_3}{I_1} \right) \Omega_3 \mathbf{e}_3. \quad (47.12)$$

Угловые скорости этих двух вращений, прецессии  $\boldsymbol{\Omega}_{\text{пр}}$  и собственного вращения  $\boldsymbol{\omega}$ , в сумме составляют полную угловую скорость вращения волчка:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_{\text{пр}} + \boldsymbol{\omega}. \quad (47.13)$$

Наглядное истолкование собственного вращения можно получить, если от рассматриваемой инерциальной системы координат перейти к системе координат, вращающейся с угловой скоростью  $\boldsymbol{\Omega}_{\text{пр}}$ . В этой системе волчок вращается с угловой скоростью, равной разнице  $\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_{\text{пр}}$ , которая как раз и равняется угловой скорости собственного вращения  $\boldsymbol{\omega}$ .

В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрим свободное движение матрёшки в инерциальной системе координат, описанной выше. Обычно матрёшка представляет собой тело вращения. Ось симметрии  $x_3$  проходит через неподвижный центр инерции матрёшки и вращается с угловой скоростью  $\boldsymbol{\Omega}_{\text{пр}}$  вокруг направления момента импульса. Для определенности пусть в начальный момент времени угол между моментом импульса  $\mathbf{M}$  и осью симметрии равен  $\alpha_M = 60^\circ$ . Тогда угол  $\alpha_\Omega$  между угловой скоростью  $\boldsymbol{\Omega}$  и осью симметрии может быть найден из уравнения

$$\operatorname{tg} \alpha_\Omega = \frac{\Omega_\perp}{\Omega_3} = \frac{M_\perp/I_1}{M_3/I_3} = \frac{I_3}{I_1} \operatorname{tg} \alpha_M, \quad \mathbf{M}_\perp \equiv M_1 \mathbf{e}_1 + M_2 \mathbf{e}_2 = I_1 \boldsymbol{\Omega}_\perp. \quad (47.14)$$

При дальнейшем движении матрёшки оба эти угла сохраняют свои значения. Если матрёшка — одноцветное тело вращения, то мы не сможем наблюдать ее собственного

вращения. Например, через время  $T_{\text{пр}} = 2\pi/\Omega_{\text{пр}}$  ось симметрии матрёшки вернется в начальное положение, но мы не сможем отличить новое положение матрёшки от начального. Если же матрёшка раскрашена, например, на ней нарисовано лицо и в начальном момент времени это лицо было в положении анфас, то через время  $T_{\text{пр}}$  мы обнаружим это лицо повернутым на угол

$$\psi = \omega \cdot T_{\text{пр}} = 2\pi \frac{\omega}{\Omega_{\text{пр}}} = 2\pi \left( \frac{I_1}{I_3} - 1 \right) \cos \alpha_M. \quad (47.15)$$

Рассмотрим два варианта: “худая” матрёшка,

$$I_1 = 2I_3,$$

и “полная” матрёшка,

$$I_1 = \frac{3}{4} I_3.$$

В первом случае угол  $\alpha_\Omega \approx 40^\circ$ , расположение векторов  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{\Omega}$  и  $\mathbf{e}_3$  примерно такое же, как и на рис. 70, и через время  $T_{\text{пр}}$  угол  $\psi = \pi$  (т. е. “худая” матрёшка окажется повернутой к нам затылком). Попробуйте сами определить взаимное расположение векторов  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{\Omega}$  и  $\mathbf{e}_3$  для “полной” матрёшки и её угол поворота  $\psi$  через время  $T_{\text{пр}}$ .

В заключение этого раздела рассмотрим движение симметрического волчка, который в инерциальной системе координат имеет закреплённую неподвижную точку  $O$ , расположенную на оси симметрии волчка. Пусть  $\mathbf{l}$  — вектор, проведенный из точки  $O$  в центр инерции волчка вдоль оси симметрии. Если на волчок действуют только силы, приложенные в неподвижной точке  $O$ , то в инерциальной системе координат  $XYZ$  с началом отсчета в точке  $O$  момент этих сил равняется нулю и потому момент импульса волчка сохраняется. Легко видеть, что в этом случае уравнения движения свободного волчка (8)–(13) сохраняют свой вид при замене

$$I_1 \rightarrow I'_1 = I_1 + ml^2. \quad (47.16)$$

В частности, ось симметрии волчка и вектор  $\mathbf{l}$  вращаются с угловой скоростью

$$\Omega_{\text{пр}} = \frac{\mathbf{M}}{I'_1} \quad (47.17)$$

вокруг постоянного вектора момента импульса  $\mathbf{M}$ .

### 47.3. Быстрый волчок в поле тяжести

Теперь рассмотрим движение описанного выше волчка в условиях, когда на него помимо силы, приложенной в неподвижной точке  $O$ , действует еще и сила тяжести  $m\mathbf{g}$ , причем для определенности будем считать, что неподвижная точка расположена ниже центра инерции волчка (рис. 71). Общее решение этой задачи дано в [1, § 35, задача 1]. Мы рассмотрим здесь только случай “быстрого волчка”, когда его кинетическая энергия велика:

$$T \sim \frac{M^2}{I_3} \gg mgl. \quad (47.18)$$

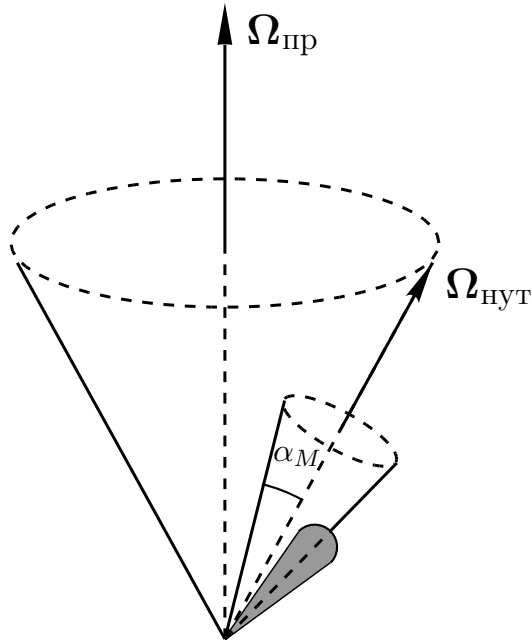


Рис. 71. Быстрый волчок в поле тяжести

В этих условиях в первом приближении можно пренебречь влиянием силы тяжести, и тогда мы приходим к уже рассмотренной выше задаче с постоянным моментом импульса и прецессирующей вокруг него с угловой скоростью (17) осью симметрии. В данной задаче эта величина называется *угловой скоростью нутации*

$$\Omega_{\text{нут}} = \frac{\mathbf{M}}{I_1}. \quad (47.19)$$

В следующем приближении учтем влияние силы тяжести, при этом уравнение для момента импульса волчка (3) примет вид

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\mathbf{l}, m\mathbf{g}]. \quad (47.20)$$

Приближенное решение этого уравнения можно провести, разделяя быстрые и медленные движения векторов  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{l}$ , подобно тому, как это делалось в § 32. Именно, представим эти вектора в виде  $\mathbf{M} = \langle \mathbf{M} \rangle + \delta\mathbf{M}$  и  $\mathbf{l} = \langle \mathbf{l} \rangle + \delta\mathbf{l}$ , где символ  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по быстрому вращению с угловой скоростью (19), в частности

$$\langle \mathbf{l} \rangle = \frac{\mathbf{M}}{M} l \cos \alpha_M, \quad (47.21)$$

где  $\alpha_M$  — угол между вектором  $\mathbf{M}$  и осью симметрии волчка. Для медленно изменяющихся усреднённых величин из уравнения (20) находим

$$\frac{d\langle \mathbf{M} \rangle}{dt} = [\langle \mathbf{l} \rangle, m\mathbf{g}] = [\Omega_{\text{пр}}, \langle \mathbf{M} \rangle], \quad \Omega_{\text{пр}} = -\frac{ml \cos \alpha_M}{M} \mathbf{g}. \quad (47.22)$$

Отсюда видно, что вектор момента импульса прецессирует (вращается с угловой скоростью  $\Omega_{\text{пр}}$ ) вокруг вертикального направления. В силу неравенства (18) отношение

скоростей  $\Omega_{\text{пр}}$  и  $\Omega_{\text{нут}}$  (19), как мы и предполагали, оказывается малым:

$$\frac{\Omega_{\text{пр}}}{\Omega_{\text{нут}}} \sim \frac{mgl}{M^2/I_1} \sim \frac{mgl}{T} \ll 1. \quad (47.23)$$

Таким образом, ось симметрии быстрого волчка вращается с большой угловой скоростью (19) вокруг направления момента импульса, а сам момент импульса в среднем медленно вращается вокруг вертикального направления с угловой скоростью  $\Omega_{\text{пр}}$ .

Приведём ещё пример. Земля может рассматриваться как быстрый симметрический (не шаровой!) волчок, притяжение Солнца и Луны приводит к прецессии земной оси с периодом около 26 тысяч лет (так называемое предварение равноденствий, см. [3, задача 9.15]).

## Задачи

**47.1.** Два одинаковых однородных шара, вращающихся с одинаковыми по величине угловыми скоростями  $\omega$ , медленно сблизившись, жёстко состыковываются друг с другом. Определить движение образовавшегося тела. Найти, какая часть начальной кинетической энергии переходит в тепло. До состыковки угловые скорости шаров были направлены:

- а) перпендикулярно линии центров и параллельно друг другу;
- б) одна — вдоль линии центров, другая — перпендикулярно.

**47.2.** Волчок с неподвижной точкой опоры  $O$ , вращавшийся с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг своей оси (скорость прецессии считаем малой), касается горизонтальной плоскости краем диска (рис. 72). Найти угловую скорость волчка, когда проскальзывание диска прекратится. В момент касания нутаций не было.

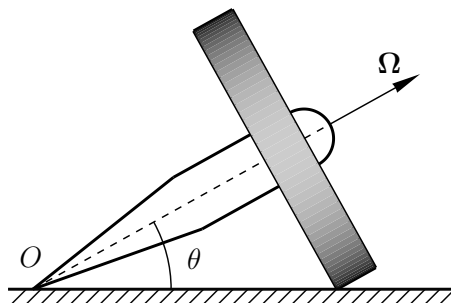


Рис. 72. К задаче 47.2

**47.3.** Какова станет продолжительность суток, когда они сравняются (за счет действия приливных сил) с месяцем (т. е. период обращения Земли вокруг оси станет равным периоду обращения Луны вокруг Земли). Принять для простоты, что ось вращения Земли перпендикулярна плоскости орбит Земли и Луны. Для численных оценок считать Землю однородным шаром радиусом  $a = 6,4$  тыс. км и массой  $M$ , в 81 раз большей массы Луны  $m$ ; расстояние от Земли до Луны  $R = 380$  тыс. км.

**47.4.** Гирокомпас представляет собой быстро вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  диск, ось которого может свободно поворачиваться в горизонтальной плоскости (рис. 73). Исследовать движение гирокомпаса на широте  $\alpha$ . Угловая скорость вращения Земли  $\omega$ .

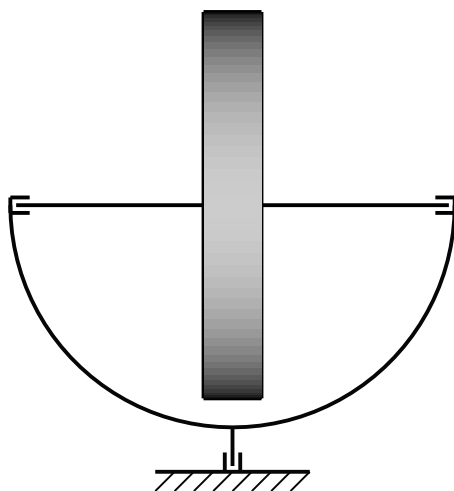


Рис. 73. К задаче 47.4

## § 48. Углы Эйлера

Ориентацию подвижной системы координат  $x_1x_2x_3$ , связанной с твёрдым телом, (будем далее обозначать ее  $K$ ) относительно неподвижной системы  $XYZ$  (далее —  $K_0$ ) принято задавать с помощью трех углов<sup>19</sup>, называемых *углами Эйлера*. Пусть для начала подвижная система координат совпадает с системой  $K_0$ . Переход к системе  $K$  можно произвести с помощью трех последовательных поворотов. Сначала проведем поворот на угол  $\varphi$  вокруг оси  $Z$ . Ось  $x_1$  полученной системы координат называют *линией узлов*  $N$ . Далее проведем поворот на угол  $\theta$  вокруг линии уз-

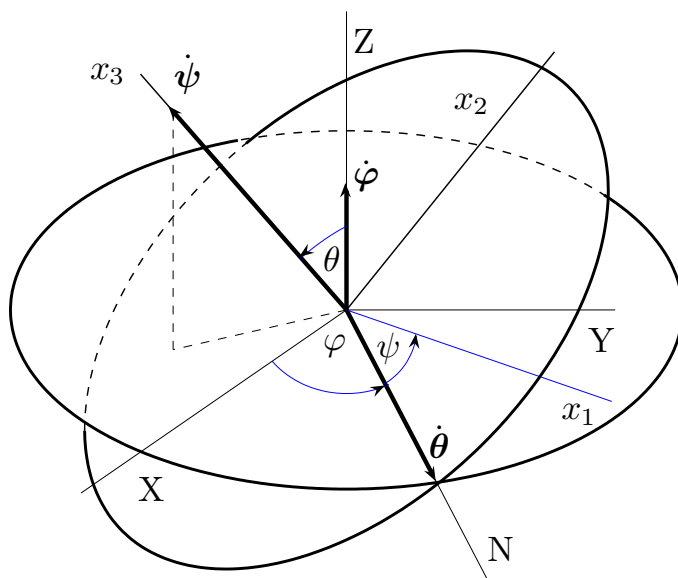


Рис. 74. Углы Эйлера

<sup>19</sup>Если, к примеру, речь идет о велосипедном колесе, то это могли бы быть угол, определяющий направление движения, угол наклона плоскости колеса и угол, фиксируемый счётчиком оборотов.

лов<sup>20</sup>. Третий поворот проведем вокруг оси  $x_3$  полученной системы координат на угол  $\psi$ . Углы Эйлера  $\varphi, \theta, \psi$  называются соответственно *углами прецессии, нутации и собственного вращения*. Соответствующие векторы угловых скоростей  $\dot{\varphi}, \dot{\theta}$  и  $\dot{\psi}$  направлены вдоль оси  $Z$ , вдоль линии узлов  $N$  и вдоль оси  $x_3$  (рис. 74).

Выразим через эти углы и их производные по времени кинетическую энергию вращения твёрдого тела. Для этого нам нужно записать компоненты угловой скорости

$$\Omega = \dot{\varphi} + \dot{\theta} + \dot{\psi}$$

в системе  $K$ , в которой тензор инерции не зависит от времени. Это легко сделать, если учесть, что полярный и азимутальный углы в этой системе для вектора  $\dot{\varphi}$  равны  $\theta$  и  $(\pi/2) - \psi$ , для вектора  $\dot{\theta}$  равны  $\pi/2$  и  $(-\psi)$  и что вектор  $\dot{\psi}$  направлен вдоль оси  $x_3$  (см. рис. 74). В итоге получаем

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \Omega_2 &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \Omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}.\end{aligned}\tag{48.1}$$

Пусть оси системы  $K$  направлены по главным осям инерции. Тогда кинетическая энергия (46.11), связанная с вращением твёрдого тела,

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2),\tag{48.2}$$

с учетом (1) также выражается через эйлеровы углы. В частности, кинетическая энергия симметрического волчка (выбираем оси  $x_1 x_2 x_3$  так, чтобы  $I_1 = I_2$ )

$$T = \frac{1}{2} \left[ I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \right].\tag{48.3}$$

Выражения (2), (3) можно теперь использовать для записи функции Лагранжа  $L$ . Для свободного движения  $L = T$ ; в этом случае обобщенный импульс

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 \Omega_3\tag{48.4}$$

равен проекции  $M_3$  момента импульса на ось  $x_3$ , обобщенный импульс

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \Omega_1 \sin \theta \sin \psi + I_2 \Omega_2 \sin \theta \cos \psi + I_3 \Omega_3 \cos \theta\tag{48.5}$$

равен проекции  $M_Z$  момента импульса на ось  $OZ$ , а обобщенный импульс

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_1 \Omega_1 \cos \psi - I_2 \Omega_2 \sin \psi\tag{48.6}$$

равен проекции момента импульса на линию узлов. Функция Лагранжа для свободного движения асимметрического волчка не зависит от угла  $\varphi$ , поэтому  $p_\varphi = M_Z$  сохраняется. Для свободного движения симметрического волчка дополнительно сохраняется  $p_\psi = M_3$ , так как в этом случае функция Лагранжа не зависит от угла  $\psi$ .

<sup>20</sup>Если бы мы выбрали для второго поворота ось  $x_2$ , то  $\theta$  и  $\varphi$  оказались бы сферическими координатами направления  $x_3$ . Такой выбор предпочитают в теории момента импульса в квантовой механике.



# ДОПОЛНЕНИЯ

## А. Элементы вариационного исчисления

Простейшим примером вариационных задач является следующая: на плоскости  $xy$  найти кратчайшую кривую между двумя заданными точками  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$ , т. е. найти такую функцию  $y(x)$ , чтобы интеграл

$$l = \int_A^B dl = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx, \quad (dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad (A.1)$$

принял наименьшее значение. При этом функция  $y(x)$  должна удовлетворять условиям

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2.$$

В данном примере ответ хорошо известен: такой кривой является прямая

$$y(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \quad (A.2)$$

В более общем виде вариационная задача формулируется так. Пусть имеется некоторый класс функций  $\tilde{y}(x)$  таких, что все они проходят через точки  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$ , т. е.  $\tilde{y}(x_1) = y_1$ ,  $\tilde{y}(x_2) = y_2$ . Среди этих функций надо найти такую функцию  $y(x)$ , при подстановке которой в интеграл

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx, \quad y' = \frac{dy(x)}{dx} \quad (A.3)$$

он принимает экстремальное значение.

Выведем уравнение, которому должна удовлетворять искомая функция  $y(x)$ . Рассмотрим в качестве принимающих участие в “конкурсе” кривых функции вида

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon h(x), \quad h(x_1) = h(x_2) = 0, \quad (A.4)$$

где  $\varepsilon$  малый параметр, а  $h(x)$  достаточно гладкая (непрерывная вместе со своей производной) функция (рис. 75). Величину  $\varepsilon h(x)$  называют *вариацией* функции  $y(x)$  и обозначают

$$\delta y(x) \equiv \varepsilon h(x).$$

При подстановке в (3) функции  $\tilde{y}$  вместо  $y$  мы получим величину

$$J(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(y + \varepsilon h, y' + \varepsilon h', x) dx, \quad h' = \frac{dh(x)}{dx},$$

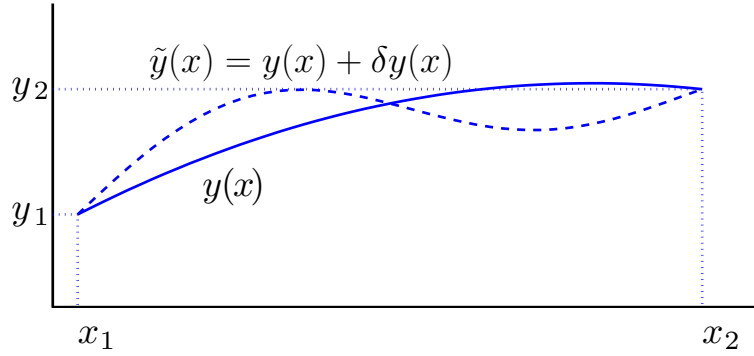


Рис. 75. К выводу уравнения Эйлера для простейшей вариационной задачи

которая является функцией параметра  $\varepsilon$ . В силу предположения о том, что  $y(x)$  обеспечивает экстремальное значение  $J(\varepsilon)$ , точка  $\varepsilon = 0$  для  $J(\varepsilon)$  должна быть точкой экстремума, поэтому

$$\left. \frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} h + \frac{\partial f}{\partial y'} h' \right) dx = 0.$$

Интегрируя это соотношение по частям с учётом того, что  $h(x_1) = h(x_2) = 0$ , получаем

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) h(x) dx + \left. \frac{\partial f}{\partial y'} h(x) \right|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) h(x) dx = 0. \quad (A.5)$$

Справедливо следующее утверждение (*основная лемма вариационного исчисления*): если  $g(x)$  непрерывна и

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x) h(x) dx = 0$$

для любой непрерывной функции  $h(x)$ , имеющей непрерывную производную и такой, что  $h(x_1) = h(x_2) = 0$ , то  $g(x) = 0$  на интервале  $x \in (x_1, x_2)$ . (Докажите!)

Воспользовавшись этой леммой, получим из (5) необходимое условие того, что  $y(x)$  даёт экстремальное значение интеграла (3):

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \quad (A.6)$$

Для примера (1) это уравнение принимает вид

$$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0,$$

откуда следует  $y' = \text{const}$ , т. е.  $y(x)$  — прямая. Учет условий  $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$  приводит к указанному выше решению (2).

В вариационном исчислении принята следующая терминология. Уравнение (6) называется *уравнением Эйлера*, его левая часть называется *вариационной производной* от  $J$  по  $y(x)$  и обозначается

$$\frac{\delta J}{\delta y(x)} \equiv \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}. \quad (\text{A.7})$$

*Вариацией (точнее, первой вариацией)  $J$*  называется величина  $\delta J$ , определенная соотношением

$$\delta J \equiv \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta J}{\delta y(x)} \delta y(x) dx. \quad (\text{A.8})$$

Аналогично ставится и решается задача определения экстремума интеграла

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y_1, \dots, y_s; y'_1, \dots, y'_s, x) dx, \quad (\text{A.9})$$

зависящего от многих неизвестных функций  $y_i(x)$ , независимых друг от друга. Необходимое условие экстремума (6) должно выполняться по отношению к каждой из этих функций:

$$\frac{\delta J}{\delta y_i(x)} \equiv \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (\text{A.10})$$

## В. Системы со связями

### В.1. Системы с идеальными голономными связями

Рассмотрим более подробно движение систем со связями. Напомним определения, приведённые в конце § 12. Мы будем представлять себе далее, что тела, движение которых мы исследуем, состоят из  $N$  “материальных точек” (“частиц”), движение которых может быть ограничено воздействием каких-либо стержней, поверхностей и т. п. Если все эти ограничения выражаются условиями

$$F_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad (\text{B.1})$$

где  $F_\alpha$  является функцией только координат частиц и времени, то говорят, что на систему наложены  $n$  *голономных связей*. Например, для случая маятника переменной длины, рассмотренного в § 12, условия (1) сводятся к одному уравнению

$$F_1(\mathbf{r}, t) \equiv r - l(t) = 0.$$

При этом подразумевается, что условия (1) выполняются за счет того, что на частицы помимо прочих потенциальных сил

$$\mathbf{F}_a = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}$$

действуют силы реакции связей  $\mathbf{R}_a$ . Связи называются *идеальными*, если при любых смещениях частиц  $\delta\mathbf{r}_a$ , не нарушающих условий (1), суммарная работа всех сил реакции равна нулю:

$$\sum_{a=1}^N \mathbf{R}_a \cdot \delta\mathbf{r}_a = 0. \quad (B.2)$$

Подчеркнем, что речь идет не о смещениях в процессе реального движения системы, а о смещениях, не нарушающих условия (1), взятые при фиксированном значении времени  $t$ .

В ньютоновой механике движение частиц определяется уравнениями

$$m_a \ddot{\mathbf{r}}_a = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} + \mathbf{R}_a, \quad a = 1, \dots, N, \quad (B.3)$$

которые совместно с условиями (1) позволяют найти как закон движения  $\mathbf{r}_a(t)$ , так и силы  $\mathbf{R}_a(t)$ . Заметим, что с учётом условий связи (1) наша система имеет  $s = 3N - n$  степеней свободы и ровно столько нужно обобщённых координат для полного описания её движения. Можно найти уравнения движения для этих обобщённых координат, стартуя от уравнений (2), (3) и условий (1), однако такой подход требует достаточно громоздких выкладок. Мы найдем эти уравнения, используя преимущества лагранжева подхода.

Условия (1) для системы из  $N$  материальных точек выделяют в  $3N$ -мерном пространстве  $K$  подпространство  $s = 3N - n$  измерений  $K_0$ , в котором только и может двигаться точка, изображающая конфигурацию системы. Силы реакции, если их изобразить в пространстве  $K$ , окажутся ортогональными подпространству  $K_0$ . Именно это и означает сформулированное выше условие идеальности связей. Введем  $n$  обобщённых координат:

$$\tilde{q}_\alpha = F_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t), \quad \alpha = 1, \dots, n,$$

остальные обобщённые координаты обозначим  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ . Подпространство  $K_0$  определяется  $n$  условиями

$$\tilde{q}_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad (B.4)$$

так что  $q_i$  — координаты в  $K_0$ . Как и в примере с маятником в § 12, можно ввести вспомогательную систему с “выключенными” связями, но добавленной чрезвычайно “жесткой” потенциальной энергией

$$\tilde{U}(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n) = \sum_{\alpha} \tilde{U}_\alpha(\tilde{q}_\alpha), \quad (B.5)$$

где  $\tilde{U}_\alpha(\tilde{q}_\alpha)$  — функция того же вида, что и в примере с маятником. Возникающие за счёт этого силы  $(-\partial\tilde{U}/\partial\tilde{q}_\alpha)$ , как и силы реакции связей ортогональны подпространству  $K_0$ .

По сути дела, мы принимаем, что при движении механической системы возникают силы, как раз обеспечивающие выполнение условий связи. Естественно, эти силы обусловлены деформациями тел, однако очень малыми деформациями, так что связанными с ними смещениями и скоростями можно пренебречь.

Функция Лагранжа вспомогательной системы имеет вид

$$\tilde{L} = L_1(q, \tilde{q}, \dot{q}, \dot{\tilde{q}}, t) - \tilde{U}(\tilde{q}), \quad (B.6)$$

где  $L_1$  — функция Лагранжа без учёта связей. Уравнения Лагранжа для координат  $\tilde{q}_\alpha$  содержат величины  $R_\alpha = -\partial\tilde{U}/\partial\tilde{q}_\alpha$ , которые играют роль обобщённых сил реакции связей. Переход к исходной системе со связями заключается в том, что координаты  $\tilde{q}_\alpha$  объявляются заданными (согласно (4)), а величины  $R_\alpha$  — неизвестными. Записывая же уравнение Лагранжа для координат  $q_i$ , можно отбросить в (6) слагаемое  $\tilde{U}$  и подставить  $\tilde{q}_\alpha = 0$ ,  $\dot{\tilde{q}}_\alpha = 0$ , т. е. использовать лагранжиан

$$L(q, \dot{q}, t) = L_1(q, 0, \dot{q}, 0, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t). \quad (B.7)$$

Иначе говоря, для системы с идеальными голономными связями можно сразу же выбрать обобщённые координаты с учётом связей и только через них выразить функцию Лагранжа. Таким образом, искомые уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s = 3N - n.$$

Предоставляем читателю проверить, что эти же уравнения можно получить из уравнений (2), (3) с учетом условий (1). Действовать можно так. Из уравнения (3) выразим силу реакции связей

$$\mathbf{R}_a = m_a \ddot{\mathbf{r}}_a + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}$$

и подставим это выражение в уравнение (2):

$$\sum_{a=1}^N \left[ m_a \ddot{\mathbf{r}}_a + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} \right] \cdot \delta \mathbf{r}_a = 0.$$

Далее следует выразить векторы  $\mathbf{r}_a$  и смещения  $\delta \mathbf{r}_a$  через обобщённые координаты  $q_i$  и соответствующие смещения  $\delta q_i$  и воспользоваться независимостью вариаций  $\delta q_i$ .

К числу систем с идеальными голономными связями принадлежит абсолютно твёрдое тело. Так называют совокупность частиц, расстояния между которыми остаются неизменными. Опыт показывает, что для описания движения многих тел такая модель вполне применима. Положение твёрдого тела можно задавать всего шестью координатами (см. § 45).

Если твёрдые тела соприкасаются, то связи оказываются идеальными в двух предельных случаях: если трением можно пренебречь и если невозможно проскальзывание — и в том и в другом случае работа сил трения равна нулю.

Условия, ограничивающие возможные движения тел, могут содержать и скорости. Например, для цилиндра, катящегося без проскальзывания по неподвижной плоскости, (рис. 76) это условие — равенство нулю скорости его точки, касающейся плоскости:

$$\dot{x} + a\dot{\varphi} = 0,$$

где  $x$  — координата оси,  $\varphi$  — угол поворота цилиндра. Это условие может быть проинтегрировано:

$$x + a\varphi = \text{const},$$

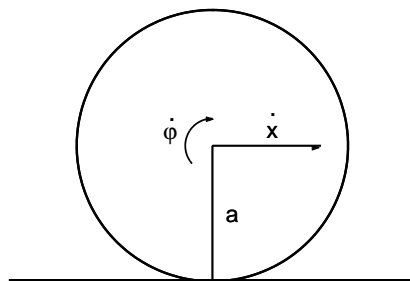


Рис. 76. Цилиндр катится, не проскальзывая, по неподвижной плоскости

и связь оказывается голономной.

Для шара или диска, катящегося по плоскости, условие связи

$$\mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{a}] = 0 \quad (B.8)$$

не может быть проинтегрировано (здесь  $\mathbf{a}$  — радиус направленный от центра диска к точке касания). Такая связь называется *неголономной*. Изложенная выше схема исследования движения системы в этом случае неприменима. Как составляются уравнения движения для систем с неголономными связями, будет рассказано в разделе В.3.

## В.2. Силы реакции связей

Решив задачу о движении системы, можно в случае необходимости перейти и к определению сил реакции. Эта задача, вообще говоря, требует дополнительного анализа. Не вдаваясь в обсуждение множества различных возможностей, ограничимся примером. Пусть речь идет о движении в плоскости системы четырёх грузиков  $A, B, C, D$ , соединенных пятью жёсткими стержнями (рис. 77), шарнирно прикрепленных к грузикам (т. е. так, что углы между стержнями могли бы свободно изменяться, если бы какой-нибудь из них удалить). Система имеет три степени свободы (скажем, две координаты одной из точек и угол, определяющий направление одной из сторон). Условия же связей выражают постоянство длин стержней. Если использовать в качестве координат  $\tilde{q}$  изменения длин стержней, то описанным выше способом можно найти силы, растягивающие стержни при движении системы.

Однако те же самые ограничения подвижности системы можно выразить, приняв условие  $BD = \text{const}$  вместо  $AC = \text{const}$ . Используя это новое условие, мы получим силу реакции, якобы направленную вдоль  $BD$ , силу же реакции существующего стержня  $AC$  потеряем. При этом и силы реакции остальных стержней получатся не истинными, а такими, как если бы стержень  $AC$  действительно удалили, а стержень  $BD$  ввели в систему.

Подчеркнём, что все эти разные возможности описания связей и реального их создания совершенно несущественны для решения задачи о движении системы с помощью уравнений Лагранжа. В то же время при правильном выборе уравнений, выражающих идеальные голономные связи, можно получать и силы реакции связей, используя для определения условий экстремума действия метод неопределённых множителей Лагранжа.

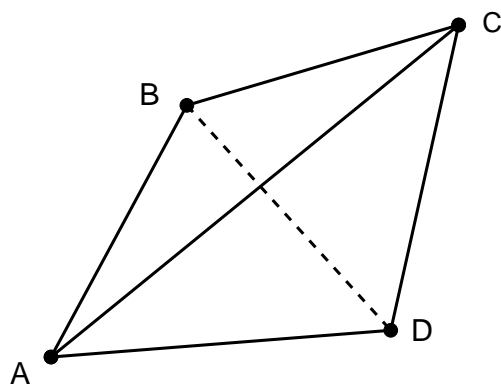


Рис. 77. Грузики со связями

### В.3. Неопределенные множители Лагранжа. Идеальные неголономные связи

Вернемся к системе с идеальными голономными связями. Будем считать, что мы воспользовались не всеми уравнениями связи и исключили меньше координат, чем могли бы.

Пусть функция Лагранжа зависит от  $s + n$  координат и стольких же скоростей  $L = L(q_1, \dots, \dot{q}_{s+n}, t)$  и пусть имеется  $n$  идеальных голономных связей:

$$F_\alpha(q_1, \dots, q_{s+n}, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (B.9)$$

Продифференцировав (9) по времени, можно представить условия связей в виде

$$\sum_{i=1}^{s+n} c_{\alpha i} \dot{q}_i + c_\alpha = 0, \quad (B.10)$$

где

$$c_{\alpha i} = \frac{\partial F_\alpha}{\partial q_i}, \quad c_\alpha = \frac{\partial F_\alpha}{\partial t}. \quad (B.11)$$

В таком случае условие экстремума действия, задающее уравнения движения системы тел, можно получить еще одним способом, — не исключая  $n$  лишних переменных, а с помощью неопределённых множителей Лагранжа.

Способ определения экстремума в вариационной задаче с помощью неопределённых множителей Лагранжа подобен способу определения экстремума функции нескольких переменных при наличии связей между ними. Введем вспомогательную функцию, включающую неизвестные функции времени  $\lambda_\alpha(t)$ ,

$$\tilde{L}(q_1, \dots, \dot{q}_{s+n}, t) = L(q_1, \dots, \dot{q}_{s+n}, t) + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha(t) F_\alpha(q_1, \dots, q_{s+n}, t), \quad (B.12)$$

запишем для нее “действие”  $\tilde{S} = \int \tilde{L} dt$  и получим уравнения Лагранжа, рассматривая все  $s + n$  координат как независимые. Тем самым мы допускаем к “конкурсу” помимо нужных нам зависимостей  $q_i(t)$ , удовлетворяющих условию (9), еще и другие. К этим  $s + n$  уравнениям следует добавить  $n$  уравнений связи (9), исключив тем самым временно добавленные зависимости  $q_i(t)$ . В итоге получится как раз  $s + 2n$  уравнений для всех координат и множителей Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{\alpha=1}^l \lambda_\alpha c_{\alpha i}. \quad (B.13)$$

Стоящие в правых частях уравнений суммы можно рассматривать как обобщённые силы, действующие “в направлениях” соответствующих обобщённых координат. В качестве добавочных условий можно использовать либо равенства (9), либо — (10).

Заметим, что условия (10) (при фиксированном времени) ограничивают возможные вариации координат  $\delta q_i$  соотношениями

$$\sum_{i=1}^{s+n} c_{\alpha i} \delta q_i = 0. \quad (B.14)$$

Эти условия означают, что работа сил реакции связей обращается в нуль, если вариации координат  $\delta q_i$  удовлетворяют соотношениям (14), и выражают таким образом идеальность связей.

Тот факт, что левая часть равенства (10) представляет собой полную производную по времени, эквивалентен соотношениям

$$\frac{\partial c_{\alpha i}}{\partial q_j} = \frac{\partial c_{\alpha j}}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial c_{\alpha i}}{\partial t} = \frac{\partial c_{\alpha}}{\partial q_i}, \quad (B.15)$$

для всех  $\alpha, i, j$ .

*Линейные идеальные неголономные связи* также могут быть выражены соотношениями вида (10) или (14). Условия идеальности неголономных связей выражаются через вариации координат так же, как для голономных. Эти соотношения как для голономных связей, так и для неголономных означают, что при “запретном” смещении тел возникли бы такие силы (может быть, очень большие), которые сделали бы такое смещение невозможным; при “разрешенном” же смещении добавочных сил не возникает. А равенства вида (15) в случае неголономных связей для соответствующих коэффициентов не выполняются. Поэтому условия связи не могут быть приведены к виду (9).

Заметим, однако, что соотношения (15) связаны с малостью второго порядка по вариациям. Эти равенства означают, что для  $\alpha$ -й связи работа  $\delta A_{12}$  на пути

$$(q_1, q_2) \rightarrow (q_1 + \delta q_1, q_2) \rightarrow (q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2)$$

и работа  $\delta A_{21}$  на пути

$$(q_1, q_2) \rightarrow (q_1, q_2 + \delta q_2) \rightarrow (q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2)$$

одинаковы с точностью до  $\delta q_1 \delta q_2$  включительно. Действительно,

$$\begin{aligned} \delta A_{12} &= \lambda_{\alpha} [c_{\alpha 1}(q_1, q_2, \dots) \delta q_1 + c_{\alpha 2}(q_1 + \delta q_1, q_2, \dots) \delta q_2] = \\ &= \lambda_{\alpha} [c_{\alpha 1}(q_1, q_2, \dots) \delta q_1 + c_{\alpha 2}(q_1, q_2, \dots) \delta q_2 + \frac{\partial c_{\alpha 2}(q_1, q_2, \dots)}{\partial q_1} \delta q_1 \delta q_2], \end{aligned}$$

$\delta A_{21}$  получается заменой  $1 \rightleftharpoons 2$ , так что

$$\delta A_{12} - \delta A_{21} = \lambda_{\alpha} \left( \frac{\partial c_{\alpha 2}}{\partial q_1} - \frac{\partial c_{\alpha 1}}{\partial q_2} \right) \delta q_1 \delta q_2.$$

Для голономной связи согласно (15) с точностью до второго порядка включительно  $\delta A_{12} - \delta A_{21} = 0$ . Именно такое условие отличает голономную связь от неголономной, обеспечивая возможность представлять силы реакции через потенциальную энергию.

Определяя же уравнения движения и силы мы оперировали только с линейными по  $\delta q$  выражениями. Поэтому уравнения (13) с добавочными условиями вида (10) справедливы и для механической системы с неголономными связями.

Для системы с  $n$  голономными связями можно исключить из функции Лагранжа  $n$  обобщённых координат. Для системы с неголономными связями подобное уменьшение числа обобщённых координат по существу невозможно.

В качестве примера неголономной связи рассмотрим условие связи для колеса, которое может катиться по плоскости, не проскальзывая. Ясно, что такое колесо можно катать, соблюдая условия связи, и вернуть в исходную точку. Однако спица колеса, которая смотрела в начальном состоянии колеса вниз, в конце окажется направлена как-то иначе.



## С. Уравнение Хилла, уравнение Матьё и параметрический резонанс

Основные сведения о параметрическом резонансе можно найти в § 31. В этом приложении мы дадим более подробную и последовательную теорию этого интересного явления.

### С.1. Общие свойства уравнения Хилла

Исходное уравнение при изучении параметрического резонанса имеет вид (31.1)

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0, \quad (C.1)$$

где частота  $\omega(t)$  меняется периодически по времени

$$\omega(t + T) = \omega(t). \quad (C.2)$$

Уравнение (1) с периодической зависимостью частоты от времени (2) называется *уравнением Хилла*. При построении приближённых решений полезно знание как можно большего числа свойств точного решения. Перечислим простые и полезные в дальнейшем свойства решений уравнения Хилла. Для этого введём *определитель Вронского*. Пусть  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — два решения уравнения (1), для них, по определению, определитель Вронского равен:

$$W(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix} = x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t).$$

1. Дифференцируя определитель Вронского по времени и избавляясь с помощью уравнения (1) от вторых производных, легко показать, что

$$\frac{dW}{dt} = 0,$$

т. е.  $W$  не зависит от времени.

2. Если  $x(t)$  решение уравнения (1), то  $x(t + T)$  тоже его решение. Доказывается подстановкой в уравнение и использованием периодичности  $\omega$ . Отсюда следует, что если  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  линейно независимы и образуют базис в пространстве решений, то выполняются равенства:

$$\begin{aligned} x_1(t + T) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t), \\ x_2(t + T) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t). \end{aligned}$$

Матрица постоянных коэффициентов  $a_{ij}$  определяется уравнением и выбором базисных решений. Базис в пространстве решений можно выбрать так, что в нём матрица станет диагональной, т. е. существуют такие решения  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , которые при сдвиге на период  $T$  преобразуются по закону

$$x_1(t + T) = \mu_1 x_1(t), \quad x_2(t + T) = \mu_2 x_2(t), \quad (C.3)$$

где  $\mu_{1,2}$  — собственные значения матрицы  $a_{ij}$ .

3. Проверкой устанавливаем, что для решений (3) справедливо соотношение

$$W(x_1(t+T), x_2(t+T)) = \mu_1 \mu_2 W(x_1(t), x_2(t)).$$

Отсюда и из свойства 1 получаем

$$\mu_1 \mu_2 = 1. \quad (C.4)$$

4. Определитель матрицы  $a_{ij}$  в силу свойства 3 равен 1, а ее собственные значения равны

$$\mu_{\pm} = d \pm \sqrt{d^2 - 1}, \quad d = \frac{1}{2} (a_{11} + a_{22}). \quad (C.5)$$

Если  $d^2 > 1$ , то  $\mu_+$  и  $\mu_-$  вещественны. Тогда одно из них по модулю больше единицы. Будем обозначать его как  $\mu_1$ , при этом может быть как  $\mu_1 > 1$  (если  $d > 1$ , в этом случае  $\mu_1 = \mu_+$ ), так и  $\mu_1 < -1$  (если  $d < -1$ , в этом случае  $\mu_1 = \mu_-$ ). Таким образом, решение  $x_1(t)$  вида (3) возрастает по модулю за период  $T$ . Это явление называется *параметрическим резонансом*. Второе решение  $x_2(t)$  убывает по модулю за этот же период.

Если же  $d^2 < 1$ , то собственные значения  $\mu_1$  и  $\mu_2$  комплексно сопряжены ( $\mu_2 = \mu_1^*$ ) и лежат на окружности радиуса единица ( $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$ ) в комплексной плоскости. Решения  $x_{1,2}(t)$  оказываются комплексными функциями и могут быть выбраны комплексно сопряженными  $x_2(t) = x_1^*(t)$ . Вещественными же решениями являются их линейные комбинации  $x_1(t) + x_2(t)$  и  $[x_1(t) - x_2(t)]/i$ . В этом случае движение осциллятора представляет собой *биения*.

5. Пусть  $x_i(t)$  — построенные комплекснозначные решения (3). Тогда каждый сдвиг времени на  $T$  приводит к умножению решения на  $\mu_i$ : решение в среднем изменяется экспоненциально. Очевидно, что  $x_i(t)/\mu_i^{t/T}$  — периодическая функция. Таким образом, существуют два линейно независимых комплексных решения уравнения Хилла, которые могут быть записаны в виде

$$x_1(t) = \mu_1^{t/T} \Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu_2^{t/T} \Pi_2(t), \quad (C.6)$$

где  $\Pi_1(t)$  и  $\Pi_2(t)$  — чисто периодические функции, а  $\mu_1$  и  $\mu_2$  связаны условием (4).

6. Не сложнее, но физически более естественно сразу искать решение более общего уравнения, учитывающего слабое линейное трение:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2(t)x = 0. \quad (C.7)$$

Подставляя

$$x = e^{-\lambda t} \tilde{x}(t), \quad (C.8)$$

получаем для функции  $\tilde{x}(t)$  уравнение Хилла (1).

## С.2. Уравнение Матьё

Выясним условия возникновения параметрического резонанса в случае, когда

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h \cos \gamma t), \quad (C.9)$$

где  $\gamma = 2\pi/T$ , а постоянная  $h \ll 1$ . Уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h \cos \gamma t)x = 0, \quad (C.10)$$

(при произвольной величине  $h$  и  $\gamma$ ) называется *уравнением Матъё*.

При учёте трения уравнение (10) преобразуется к уравнению вида (7):

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2(1 + h \cos \gamma t)x = 0, \quad (C.10a).$$

которое с помощью подстановки (8) сводится к уравнению Матъё.

Для уравнения Матъё  $\mu_1$  есть функция параметров  $\gamma$  и  $h$  и граница, разделяющая области устойчивости и неустойчивости, задается уравнениями  $\mu_1(\gamma, h) = -1$  и  $\mu_1(\gamma, h) = 1$ , дающими кривые на плоскости  $(\gamma, h)$ , которые будем называть *нейтральными*. Построим нейтральные кривые при малых  $h$ , начиная с вырожденного случая  $h = 0$ . При  $h = 0$  частота  $\omega = \omega_0$  не меняется вообще и решение известно:

$$x_1(t) = a e^{i\omega_0 t}.$$

С другой стороны, ничто не мешает нам считать, что частота  $\omega$  меняется с произвольным периодом  $T = 2\pi/\gamma$ , хотя и нулевой амплитудой, и представить это решение в виде

$$x_1(t) = a e^{i\omega_0 t} = a e^{i(\omega_0 - \gamma)t} e^{i\gamma t} = e^{i(\omega_0 - \gamma)t} \Pi_1(t),$$

откуда

$$\mu_1 = \exp \left[ i(\omega_0 - \gamma) \frac{2\pi}{\gamma} \right].$$

Считая  $\omega_0$  и  $\gamma$  положительными, видим, что  $\mu_1 = \pm 1$  при условии

$$\frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{n}{2},$$

где  $n \geq 1$  — целое число, причем  $\mu_1 = -1$ , если  $n$  нечётно и  $\mu_1 = 1$  если  $n$  чётно. При  $h \ll 1$  естественно предположить, что на нейтральной кривой частота  $\gamma$  лежит близко к найденным дискретным значениям.

### С.3. Параметрический резонанс на основной гармонике $\gamma = 2\omega_0$

Рассмотрим основной параметрический резонанс при  $n = 1$  и, соответственно, при

$$\gamma = 2\omega_0 + \epsilon,$$

где отстройка  $\epsilon$  предполагается малой. Удобно представить  $\mu_1$ , которое в этом случае близко к  $(-1)$ , в виде

$$\mu_1 = -e^{sT} = e^{sT - i\pi},$$

где  $s$  — неизвестный вещественный параметр, равный нулю на нейтральной кривой и малый положительный в области неустойчивости.

Отыскивая  $\Pi(t)$  в виде ряда Фурье

$$\Pi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{in\gamma t}$$

с неизвестными коэффициентами  $A_n$ , получаем, что решение уравнения (10) следует искать в виде

$$x(t) = e^{st} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{i(2n-1)(\omega_0 + \epsilon/2)t}. \quad (C.11)$$

Подставляя ряд (11) в уравнение (10) и представляя  $\cos \gamma t$  как полусумму экспонент, приравняем нулю коэффициенты при всех гармониках. В итоге получим бесконечную систему однородных линейных алгебраических уравнений для коэффициентов  $A_n$ :

$$\{\omega_0^2 + [s + i(2n - 1)(\omega_0 + \epsilon/2)]^2\} A_n = -\frac{h}{2} \omega_0^2 (A_{n-1} + A_{n+1}). \quad (C.12)$$

Инкремент  $s$  определяется из условия равенства нулю определителя этой бесконечной системы:  $(-\infty < n < +\infty)$ .

Будем искать решение, используя малость параметра  $h$ . В нулевом приближении (при  $h \rightarrow 0$ ), ряд (11) сводится к обычным свободным колебаниям с постоянной частотой  $\omega_0$ :

$$x(t) \rightarrow a \cos(\omega_0 t + \varphi) = A_+ e^{i\omega_0 t} + A_- e^{-i\omega_0 t}, \quad A_{\pm} = \frac{1}{2} a e^{\pm i\varphi}. \quad (C.13)$$

Сравнивая (11) и (13), найдем, что в нулевом приближении  $s = \epsilon = 0$  и все амплитуды, кроме  $A_0$  и  $A_1$ , равны нулю. Подставляя нулевое приближение в правую часть уравнения (12), найдем далее, что в первом по  $h$  приближении отличны от нуля лишь коэффициенты  $A_{-1} = (h/16) A_0$  и  $A_2 = (h/16) A_1$ .

В итоге, оставляя лишь члены первого порядка в уравнении (12), получаем систему из двух уравнений:

$$\begin{aligned} 2(\epsilon + 2is) A_0 - h\omega_0 A_1 &= 0, \\ 2(\epsilon - 2is) A_1 - h\omega_0 A_0 &= 0. \end{aligned} \quad (C.14)$$

Приравняв нулю определитель этой системы, получаем для инкремента следующее

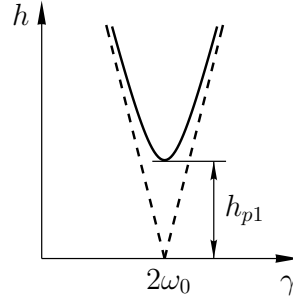


Рис. 78. Область параметрической неустойчивости около  $2\omega_0$

выражение<sup>21</sup>:

$$s = \frac{1}{4} \sqrt{(h\omega_0)^2 - 4\epsilon^2}.$$

Отсюда, вспоминая определение  $\epsilon$ , находим нейтральную кривую ( $s = 0$ ):

$$\gamma = 2\omega_0 \pm \frac{h}{2} \omega_0.$$

Область неустойчивости начинается от  $h = 0$  и находится между расходящимися пунктирными прямыми на рис. 78; ширина этой области по частоте растет линейно с ростом  $h$ .

<sup>21</sup>Второе решение соответствует другому знаку  $s$ ; движение рассматриваемого осциллятора, удовлетворяющее произвольным начальным условиям, имеет поэтому вид (31.6).

Решение уравнения с трением (10a) отличается от найденного дополнительным множителем  $\exp(-\lambda t)$  (см. уравнение (8)), поэтому для инкремента в этом случае имеем

$$s = -\lambda + \frac{1}{4} \sqrt{(h\omega_0)^2 - 4\epsilon^2}.$$

Возбуждение колебаний возможно только при

$$h > h_{p1} = \frac{4\lambda}{\omega_0}$$

и область параметрической неустойчивости находится выше сплошной кривой на рис. 78.

#### С.4. Параметрический резонанс при $\gamma = \omega_0$

Найдем условия возникновения резонанса при  $n = 2$  и  $\gamma = \omega_0 + \epsilon$ . Представляем  $\mu_1$ , близкое к единице, в виде  $\mu_1 = e^{sT}$ . Ищем решение уравнения (10) в виде

$$x(t) = e^{st} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{in(\omega_0 + \epsilon)t} \quad (C.15)$$

и получаем систему уравнений для коэффициентов  $A_n$

$$\{\omega_0^2 + [s + in(\omega_0 + \epsilon)]^2\} A_n = -\frac{h}{2} \omega_0^2 (A_{n-1} + A_{n+1}), \quad (C.16)$$

которая отличается от системы (12) лишь заменами  $(2n - 1) \rightarrow n$  и  $\epsilon/2 \rightarrow \epsilon$ . Далее повторяем путь, пройденный в предыдущем разделе. Именно, сравнивая (15) и (13), находим, что в нулевом по  $h$  приближении  $s = \epsilon = 0$  и все амплитуды, кроме  $A_{-1}$  и  $A_1$ , равны нулю. Подставляя нулевое приближение в правую часть уравнения (16), находим, что в первом по  $h$  приближении отличны от нуля лишь коэффициенты

$$A_{\pm 2} = \frac{h}{16} A_{\pm 1}, \quad A_0 = \frac{h}{2} (A_{-1} + A_1). \quad (C.17)$$

После этого, оставляя лишь члены первого порядка в уравнении (16), получаем систему из двух тривиальных уравнений:

$$(\epsilon + is) A_{-1} = 0, \quad (\epsilon - is) A_1 = 0,$$

из которых следует, что  $s = \epsilon = 0$  и с учетом членов первого порядка по  $h$  включительно.

Таким образом, необходимо учесть второй порядок по  $h$ , что приводит к системе уравнений:

$$\begin{aligned} 4(\epsilon + is) A_{-1} &= h\omega_0 (A_{-2} + A_0), \\ 4(\epsilon - is) A_1 &= h\omega_0 (A_2 + A_0). \end{aligned} \quad (C.18)$$

Выражаем  $A_{-2}$ ,  $A_0$ ,  $A_2$  через  $A_{-1}$  и  $A_1$  с помощью уравнений (17) и преобразуем уравнения (18) так, чтобы они содержали только  $A_{-1}$  и  $A_1$ . Приравнивая нулю определитель полученной системы двух уравнений, получаем выражение для инкремента:

$$s = \frac{1}{8} \sqrt{h^4 \omega_0^2 - \left(8\epsilon + \frac{2h^2}{3} \omega_0\right)^2}.$$

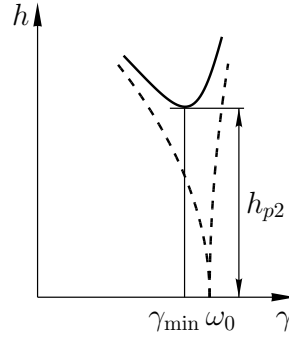


Рис. 79. Область параметрической неустойчивости около  $\omega_0$

Нейтральная кривая оказывается несимметричной и ее левая и правая ветви задаются формулами

$$\gamma_{л} = \omega_0 - \frac{5h^2}{24} \omega_0, \quad \gamma_{п} = \omega_0 + \frac{h^2}{24} \omega_0.$$

Область неустойчивости начинается от  $h = 0$  и расположена между этими ветвями, изображенными пунктирными линиями на рис. 79; ширина этой области по частоте растет пропорционально  $h^2$ .

Если есть трение, то инкремент оказывается равен

$$s = -\lambda + \frac{1}{8} \sqrt{h^4 \omega_0^2 - \left(8\epsilon + \frac{2h^2}{3} \omega_0\right)^2},$$

а минимум на нейтральной кривой  $h = h(\gamma)$  смещен в точку

$$\gamma_{\min} = \omega_0 - \frac{h^2}{12} \omega_0$$

и пороговое значение  $h$  в нем равно

$$h_{p2} = \sqrt{\frac{8\lambda}{\omega_0}}.$$

Таким образом, возбуждение колебаний возможно только при  $h > h_{p2}$  и область параметрической неустойчивости находится выше сплошной кривой на рис. 79.

Поскольку трение предполагалось малым ( $\lambda \ll \omega_0$ ), видим, что  $h_{p2}/h_{p1} \gg 1$  и получение даже второго резонанса затруднено. Пороги для высших резонансов оказываются ещё большими, а ширины ещё меньшими.

## Д. Дифференциальные формы и канонические преобразования

Используя математический аппарат дифференциальных форм, можно некоторые вопросы, связанные с каноническими преобразованиями, рассмотреть более компактно, чем в основном тексте. Однако освоение самого аппарата дифференциальных форм требует определенных усилий. Приводимое ниже изложение этого вопроса является весьма кратким и фрагментарным. Более подробное и последовательное изложение теории внешних дифференциальных форм применительно к задачам механики можно найти, например, в книге [4].

## Д.1. Дифференциальные формы

Замена переменной  $x = x(\xi)$  в интеграле

$$\int f(x) dx$$

сводится, как известно, к подстановкам

$$f = f(x(\xi)), \quad dx = \frac{dx}{d\xi} d\xi.$$

Иначе обстоит дело при замене двух переменных

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

в двойном интеграле

$$I = \int f(x, y) dx dy;$$

в этом случае “элемент площади”

$$dx dy \tag{D.1}$$

заменяется на

$$D d\xi d\eta,$$

где

$$D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}$$

— якобиан преобразования  $xy \rightarrow \xi\eta$ , а не на произведение дифференциалов

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta. \tag{D.2}$$

Можно однако ввести такое правило умножения дифференциалов, при применении которого преобразование “элемента площади”  $dx dy$  будет всё-таки сводиться к подстановке (2) в (1).

Введем так называемое *внешнее произведение дифференциалов*, обозначаемое

$$dx \wedge dy,$$

которым можно манипулировать, как обычным произведением, но при перестановке сомножителей нужно изменять знак:

$$dy \wedge dx = -dx \wedge dy. \tag{D.3}$$

Можно перемножать и одинаковые дифференциалы. При этом в соответствии с (3) будет получаться нуль:

$$dx \wedge dx = 0.$$

Подстановка (2) в (1)

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \right) \wedge \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \right) = \\ &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \wedge d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} d\eta \wedge d\xi + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} d\xi \wedge d\eta + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \wedge d\eta = \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\xi \wedge d\eta = D d\xi \wedge d\eta, \end{aligned}$$

действительно, приводит к замене  $dx dy$  на  $Dd\xi d\eta$ .

Легко произвести обобщение на случай любого числа переменных. Внешнее произведение  $n$  дифференциалов

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

определяется условием: можно переставлять любые соседние дифференциалы, изменяя при этом знак произведения.

При замене

$$x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

которой соответствует замена дифференциалов

$$dx_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} d\xi_j, \quad (D.4)$$

получаем

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)} d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_n. \quad (D.5)$$

В самом деле, после подстановки (4) в левую часть (5) и умножения мы получим сумму произведений  $n$  множителей вида  $\partial x_i / \partial \xi_j$  с  $n$  различными значениями индекса  $i$ , при каждом из которых стоит произведение  $n$  дифференциалов со всеми возможными значениями индексов  $j$ :  $d\xi_{j1} \wedge d\xi_{j2} \wedge \dots \wedge d\xi_{jn}$ . Однако произведение дифференциалов отлично от нуля только в том случае, если все индексы  $j$  в нем различны, причем все эти произведения дифференциалов равны друг другу или различаются только знаком в зависимости от того, возможен переход от последовательности индексов  $j1, j2, \dots, jn$  к последовательности  $1, 2, \dots, n$  путем чётного числа перестановок соседних индексов или нечётного. Мы получаем фактически описание определителя, составленного из производных  $\partial x_i / \partial \xi_j$ , — якобиана, стоящего в правой части равенства (5).

Выражение вида

$$\sum_{i,j,\dots,k} F_{i,j,\dots,k}(x_1, x_2, \dots, x_n), dx_i \wedge dx_j \wedge \dots \wedge dx_k$$

в котором каждое слагаемое содержит произведение  $l$  дифференциалов, называется *внешней дифференциальной  $l$ -формой* и обозначается  $\omega^l$ . Например, подынтегральное выражение интеграла по поверхности

$$\int \mathbf{A} d\mathbf{S}$$

можно рассматривать как 2-форму:

$$\omega^2 = A_x dy \wedge dz + A_y dz \wedge dx + A_z dx \wedge dy.$$

Вводится также *внешний дифференциал  $l$ -формы*. Это  $(l+1)$ -форма

$$d\omega^l = \omega^{l+1} = \sum_{i,j,\dots,k} dF_{i,j,\dots,k} \wedge dx_i \wedge dx_j \wedge \dots \wedge dx_k,$$



где  $dF_{i,j,\dots,k}$  — обычный дифференциал функции:

$$dF_{i,j,\dots,k} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial F_{i,j,\dots,k}}{\partial x_m} dx_m. \quad (D.6)$$

При повторном дифференцировании внешней формы результат равен нулю, в чём легко убедиться, учитывая, что

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Справедливо и обратное утверждение: если  $d\omega^l = 0$ , то  $\omega^l$  является внешним дифференциалом какой-то дифференциальной формы:  $\omega^l = d\omega^{l-1}$ .

Выражение  $\omega^1 = f(x) dx$  рассматривалось нами как подынтегральное выражение. Можно рассматривать его также как линейную функцию дифференциала  $dx$ . Можно приписывать  $\omega^1$  и численное значение, подставив численные значения  $x$  и  $dx$ .

Дифференциальные формы, к которым мы пришли как к элементам записи многомерного интеграла, также можно рассматривать как функции точки и полилинейные функции координат вектора дифференциалов  $(dx_1, dx_2, \dots, dx_s)$ . Можно приписывать дифференциальной форме численное значение, подставляя численные значения координат и компонент дифференциалов. При этом необходимо предварительно переставить дифференциалы в порядке убывания индексов, после чего при умножении на значки  $\wedge$  не обращать внимания.

Аппарат дифференциальных форм представляет собой существенный элемент в определенных геометрических исследованиях,— в теории *симплектических пространств*. Однако так глубоко входить в математические вопросы мы здесь не будем.

## D.2. Новое определение канонических преобразований

Используя внешние дифференциальные формы, можно представить определение канонического преобразования (36.2)

$$\sum_{i=1}^s p_i dq_i - \sum_{i=1}^s P_i dQ_i = dF \quad (D.7)$$

в более симметричной форме, взяв от обеих частей этого равенства внешний дифференциал и учтя, что внешний дифференциал от  $(dF)$  равен нулю:

$$\sum_{i=1}^s dp_i \wedge dq_i = \sum_{i=1}^s dP_i \wedge dQ_i. \quad (D.8)$$

Разумеется, исключив из определения функцию  $F(q_1, \dots, Q_s)$ , мы потеряли конструктивный характер определения. Впрочем, мы сохраняем возможность сделать шаг назад и вернуться от симметричного определения (8) к конструктивному (7).

### Д.3. Сохранение фазового объёма при канонических преобразованиях

Возведем обе части равенства (8) в  $s$ -ю степень и примем во внимание, что отличны от нуля только произведения различных дифференциалов и что переставлять их приходится парами, так что изменения знаков не происходит. В итоге имеем

$$s! \prod_{i=1}^s dp_i \wedge dq_i = s! \prod_{i=1}^s dP_i \wedge dQ_i.$$

Далее, учитывая равенство (5), получаем

$$\frac{\partial(Q_1, P_1, \dots, Q_s, P_s)}{\partial(q_1, p_1, \dots, q_s, p_s)} = 1. \quad (D.9)$$

Отсюда немедленно следует, что фазовый объём сохраняется при канонических преобразованиях.

### Д.4. Инвариантность скобок Пуассона относительно канонических преобразований

Пусть  $f$  и  $g$  — функции обобщённых координат и импульсов:

$$f = f(q, p), \quad g = g(q, p).$$

Рассмотрим внешнюю дифференциальную форму

$$df \wedge dg \wedge (\omega)^{s-1}, \quad (D.10)$$

где  $\omega$  — форма<sup>22</sup>, входящая в равенство (8). Нетрудно убедиться, что это выражение сводится к

$$(s-1)! \{f, g\} \prod_{i=1}^s dp_i \wedge dq_i, \quad (D.11)$$

где  $\{f, g\}$  — скобка Пуассона, определяемая путем дифференцирования по переменным  $p, q$ .

То же самое выражение (10) можно записать через канонические переменные  $P, Q$ . При этом оно будет отличаться от (11) только заменой всех переменных  $p, q$  на  $P, Q$ , в том числе, скобки Пуассона будут вычислены путем дифференцирования по новым переменным:  $\{f, g\}_{P, Q}$ . С учетом (8) и (9) отсюда немедленно следует инвариантность скобок Пуассона относительно канонических преобразований.

<sup>22</sup>Здесь  $(\omega)^{s-1}$  — это  $\omega$  в степени  $s-1$ .

## Библиографический список

- [1] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. М.: Наука, 1988. Т.: I. Механика.
- [2] *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Наука, 1975.
- [3] *Котжин Г. Л., Сербо В. Г.* Сборник задач по классической механике. М.; Ижевск: РХД, 2003.
- [4] *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
- [5] *Мотт Н., Месси Г.* Теория атомных столкновений. М.: Мир, 1969.
- [6] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. М.: Наука, 1976. Т.: V. Статистическая физика, ч. 1.
- [7] *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.
- [8] *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. М.: Гостехиздат, 1951.
- [9] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. М.: Наука, 1982. Т.: VIII. Электродинамика сплошных сред.
- [10] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. М.: Наука, 1988. Т. II. Теория поля.

КОТКИН Глеб Леонидович,  
СЕРБО Валерий Георгиевич,  
ЧЕРНЫХ Александр Иванович

## ЛЕКЦИИ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Редактор С. Д. Андреева

---

Подписано в печать

Формат 60x80/16

Печать офсетная

Заказ

Уч.-изд.л.,.

Тираж экз.

Цена

---

Редакционно–издательский отдел Новосибирского университета,  
участок оперативной полиграфии НГУ; 630090, Новосибирск – 90.  
ул. Пирогова, 2.