Иркутский государственный университет

Б.В.Мангазеев

Лекции по электродинамике

Электро- и магнитостатика

Иркутск 2014

УДК 530.1

Мангазеев Б.В. Лекции по электродинамике. Электро- и магнитостатика. Учеб. пособие. - Иркутск: Иркут. ун-т, 2014, - __ с.

Предлагаемое пособие основано на курсе лекций, читаемых студентам-физикам Иркутского госуниверситета в четвертом учебном семестре. Основные понятия и соотношения классической теории электромагнитного поля рассматриваются на достаточно высоким уровне математической строгости, принятом в курсах теоретической физики. Обсуждение стартует с уравнений Максвелла как аксиом электромагнитной теории (считается, что студенты знакомы с ними "в первом приближении" из курса общей физики). В то же время все теоретические выкладки доводятся до получения математических формулировок эмпирических законов, послуживших основой для создания системы уравнений Максвелла. Как правило, такие выводы позволяют проследить и обратную логику - от опытных фактов к физическим понятиям и уравнениям теории. От читателей требуется уверенное владение основами векторного и тензорного анализа, без этого невозможно подлинное понимание основных положений теории электромагнетизма. В пособии полностью опущено обсуждение теории электромагнитного поля в средах, так как эти вопросы составляют предмет курса макроскопической электродинамики, существенно опирающегося на знание квантовой и статистической физики.

Учебное пособие предназначено для студентов физических факультетов университетов.

© Иркутский государственный
университет, 2014

Оглавление

Введение

Классическая электродинамика является одной из основополагающих дисциплин в подготовке физика, без ее глубокого понимания невозможно освоение разделов физики, связанных с конкретной специализацией.

Предлагаемое пособие основано на курсе лекций, читающихся на физическом факультете Иркутского госуниверситета в четвертом учебном семестре. В третьем семестре, изучая основы векторного и тензорного анализа [1], студенты в достаточной степени овладевают языком, на котором формулируется классическая теория электромагнитного поля, что позволяет излагать ее здесь на достаточно высоком уровне математической строгости. Понятия из читаемого позже курса уравнений математической физики - δ-функция Дирака и функция Грина - являются весьма существенными для изложения. Соответствующие определения даются в пособии и, как показывает практика, вполне доступны студентам, изучившим курсы математического анализа и дифференциальных уравнений.

Ограниченность учебного времени заставляет весьма тщательно подойти к отбору материала и стилю изложения. Как правило, используются два подхода к построению курса электродинамики.

В ряде учебников скрупулезно рассматриваются многочисленные опытные факты и эмпирические законы, детальное обсуждение которых позволяет сформулировать максвелловские уравнения поля и затем извлечь необходимые следствия. Такой подход применен в классических монографиях Дж. Джексона [2] и И.Е. Тамма [3]. Однако в нашем случае студенты уже владеют определенными знаниями, полученными в курсе общей физики, а у нас нет нужды и времени для разбора множества эмпирических фактов, среди которых можно даже несколько потеряться, прежде чем доберешься до сути.

Кроме того, на таком конкретном эмпирическом материале авторы обычно параллельно развивают аппарат векторного и тензорного анализа. Это нередко внушает читателям ошибочное представление о том, что будто бы данный математический аппарат находится в какой-то зависимости от содержания собственно электродинамики. Например, некоторые студенты не осознают до конца, что математическая теорема Гаусса применима к векторному полю любой природы, а электростатическая теорема Гаусса (кстати, справедливая и в динамике) - это физический закон, выражающий некоторое свойство статического электрического поля. Причем это свойство и безвихревой характер электростатического поля полностью эквивалентны закону Кулона и принципу суперпозиции. Вообще термин "теория поля" требует с самого начала четкого разъяснения. Как синоним "векторного анализа" он означает математический аппарат работы с векторными и скалярными (и, вообще, тензорными) полями любой природы. В применении же к электродинамике термин "теория поля" имеет иной смысл: это *физическая теория (конкретного физического) электромагнитного поля*, суть которой в том, что данное физическое поле подчиняется физическим законам (управляется физическими законами), выражаемыми системой уравнений Максвелла. Так что смысл положений физической теории не следует смешивать с математическими средствами, при помощи которых они выражены.

Другой подход к построению курса электродинамики, используемый, например, в [4], [5] для построения нашего курса тоже не подходит. В самом деле, в прекрасной книге М.М. Бредова, В.В. Румянцева, И.Н. Топтыгина [4], а также в известном курсе Л.Д. Ландау, Е.М. Лившица [5] за отправную точку взяты специальная теория относительности и вариационный принцип наименьшего действия. Это исключительно фундаментальный, но в тоже время и крайне абстрактный для студента младшего курса подход. Такой подход хорош для тех, кто уже уверенно владеет уравнениями Максвелла, записанными в фиксированной системе координат в трехмерной форме. Конечно, для нас более естественно подвести читателя к релятивистской трактовке электромагнитных явлений, отталкиваясь от обычной трехмерной формы максвелловских уравнений, как это было сделано исторически. Поэтому в предлагаемом пособии материал выстраивается в несколько иной логике, чем в указанных курсах, в тоже время многие конкретные выкладки и рассуждения проводятся по аналогии с выводами, приведенными в этих курсах. Внимание сосредоточено только на основных положениях теории, вычисления проводятся достаточно подробно, с разъяснением моментов, которые могут вызвать затруднения у студента второго курса. Обсуждение стартует с уравнений Максвелла как аксиом электромагнитной теории. При этом все теоретические выкладки доводятся до получения математических формулировок эмпирических законов, послуживших основой для создания системы уравнений Максвелла. Как правило, такие выводы позволяют проследить и обратную логику - от опытных фактов к физическим понятиям и уравнениям теории. В пособии полностью опущено обсуждение теории электромагнитного поля в средах, так как эти вопросы составляют предмет курса макроскопической электродинамики, существенно опирающегося на знание квантовой и статистической физики.

В первой и второй главах пособия из уравнений Максвелла получены уравнения электро- и магнитостатики. Введение δ-функции Дирака и нахождение функции Грина для оператора Лапласа позволяют записать решение уравнения Пуассона для скалярного и векторного потенциалов. Законы Кулона, Био-Савара-Лапласа и закон Ампера для взаимодействия двух токов являются следствием этого решения и выражения для силы Лоренца. В свою очередь, из выкладок видно, что статические уравнения Максвелла могут быть получены из перечисленных эмпирических законов и принципа суперпозиции. Коэффициент пропорциональности в законе Ампера связан с электродинамической постоянной, которая оказалась равной, согласно опыту Вебера и Кольрауша скорости света. Здесь, в статике впервые в теории электричества и магнетизма возникает фундаментальная константа с. Рассматриваемое далее асимптотическое разложение функции Грина приводит к выражениям для поля ограниченной системы зарядов (токов) на далеких расстояниях через дипольный и квадрупольный моменты. Сделан также ряд заключений о поведении диполя во внешнем поле. Сформулированные в статике понятия и приемы оказываются (после соответствующего обобщения) исключительно плодотворными и при развитии динамической теории электромагнитного поля.

Следующие главы пособия будут изданы позже.

В третьей главе формулируется закон электромагнитной индукции Фарадея, статическое уравнение для ротора магнитного поля обобщается на случай динамики введением тока смещения Максвелла, благодаря чему снимается противоречие с законом сохранения заряда, система уравнений Максвелла приобретает законченный вид. Если в статике понятие поля фактически можно рассматривать как чисто вспомогательное и, при желании, полностью изгнать из теории, то в динамике становится ясным, что поле - это фундаментальная физическая сущность. Формулировка закона сохранения энергии для электродинамических систем позволяет лучше почувствовать физическую реальность электромагнитного поля. Для получения решений системы уравнений Максвелла удобно, как в статике, ввести понятия потенциалов электромагнитного поля. Они являются вспомогательными величинами, к тому же неоднозначно заданными. Однако эта неоднозначность позволяет наложить на потенциалы некоторые условия, самым естественным таким условием является условие (калибровка) Лоренца. При применении последней к потенциалам уравнения для них (эквивалентные уравнениям поля) оказываются весьма симметричными и отличаются от уравнения Пуассона лишь наличием дополнительного слагаемого в виде второй производной по времени (соответствующий дифференциальный оператор называется оператором Даламбера). Прежде чем искать решение полученных уравнений, неоднородная часть которых - это порождающие поле заряды и токи, логично рассмотреть решение соответствующих однородных уравнений.

Однородные динамические уравнения Максвелла для полей и потенциалов имеют вид трехмерного волнового уравнения. Его математическое решение рассматривается *в четвертой главе* пособия в частном одномерном случае (плоские волны).

После этого становится возможным исследование структуры поля в вакууме (в областях, где отсутствуют заряды и токи), нетривиальное (ненулевое решение) волнового уравнения и есть электромагнитные волны - явление, предсказываемое теорией Максвелла. Хотя решение в виде плоских волн является частным, в дальнейшем становится понятным, что суперпозиция таких решений дает общее решение трехмерного волнового уравнения.

Нахождение решения неоднородных динамических уравнений для потенциалов - весьма непростой вопрос, изложенный *в пятой* *главе* пособия. Идеология функции Грина, развитая для уравнения Пуассона в статике, здесь оказывается столь же плодотворной. Для нахождения функции оператора Даламбера используется фурье-разложение, известное студентам из курса математического анализа. Фурье-образ функции Грина находится достаточно просто, сама функция Грина восстанавливается по фурье-образу при помощи контурного интегрирования с применением теории вычетов, изучаемой в теории функций комплексного переменного. На полученном решении уравнений Максвелла (в виде запаздывающих потенциалов) основана классическая теория излучения. Найденное решение используется для обсуждения вопроса об излучении точечного заряда (потенциалы Лиенара-Вихерта).

Шестая глава посвящена рассмотрению мультипольного разложения поля системы нерелятивистских зарядов, включая электрическое дипольное излучение, магнитное дипольное излучение и электрическое квадрупольное излучение. Асимптотическое разложение фурье-гармоники для запаздывающего потенциала в нерелятивистском приближении с учетом только ведущих слагаемых позволяет хорошо почувствовать физику процесса излучения, не выходя за рамки математики, изучаемой на первых двух курсах. В шестой главе обсуждается также классическая трактовка реакции излучения.

Седьмая глава посвящена некоторым вопросам релятивистского рассмотрения электромагнитных явлений. При выводе преобразований Лоренца использована глубокая аналогия с ортогональными преобразованиями поворота в трехмерном пространстве, что дает возможность сразу включить аппарат тензорного анализа [1]. Трансформационные свойства электродинамических величин выясняются при анализе уже изученных читателями соответствующих трехмерных величин и уравнений теории. Рассмотрение завершается введением тензора электромагнитного поля и выводом трансформационных свойств поля.

В данном пособии изложены только основы классической электродинамики, и читателю рекомендуется для более глубокого изучения использовать учебники и задачники [2-7], а также цитированную там литературу.

1. Электростатика

1.1. Динамические и статические уравнения Максвелла

Электромагнитное поле порождается зарядами и токами. На микроскопическом уровне заряд дискретен, у заряженных элементарных частиц заряды принимают значения $\pm e$ ($-e$ - заряд электрона), а заряды атомных ядер кратны e. Для макроскопических количеств заряженного вещества вводится понятие *плотности заряда* $\rho(x,y,z,t)=dQ/dV$, где dQ - заряд, находящийся в физически бесконечно малом объеме dV. Плотность заряда - скалярное поле, зависящее времени t и от точки пространства (задаваемой координатами (x, y, z) в некоторой фиксированной системе координат). В отличие от плотности массы оно может принимать и отрицательные значения. Скорость движения заряда dQ, содержащегося в объеме dV, задает векторное поле скоростей $\vec{v}(x,y,z,t)$. Произведение плотности заряда $\rho(x,y,z,t)$ на скорость $\vec{v}(x,y,z,t)$ - векторное поле *плотности тока* $\vec{j}(x,y,z,t)=\rho(x,y,z,t)\vec{v}(x,y,z,t)$.

Основная задача электродинамики - по заданным (в естественных или искусственных системах, например, в атоме или антенне) зарядам ρ и токам $\vec{j}$ найти создаваемые ими в пространстве электрическое поле $\vec{E}(x,y,z,t)$ и магнитное поле $\vec{H}(x,y,z,t)$. Эти физические поля подчиняются системе уравнений Максвелла[1]:

$$\operatorname{div}\vec{E}=4\pi\rho, \tag{1.1а}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}, \tag{1.1б}$$

$$\operatorname{div}\vec{H}=0, \tag{1.1в}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}, \tag{1.1г}$$

где c - скорость света.

[1] Здесь и далее различные уравнения из системы уравнений обозначаются одинаковым номером, с добавлением букв: а, б, …

Система уравнений (1.1) была сформулирована английским физиком Джеймсом Максвеллом в 1864 г. в результате обобщения целого ряда эмпирических законов и фактов, накопленных к тому времени при изучении электромагнитных явлений. Система (1.1) записана в современном виде с использованием дифференциальных операций векторного анализа. Напомним читателю (см.[1]) определения дивергенции и ротора векторного поля:

$$\mathrm{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}A_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}A_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}A_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}A_3 \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z,$$

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \equiv \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix},$$

$$(\mathrm{rot}\vec{A})_i \equiv \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}A_k.$$

$$\mathrm{rot}\vec{A} = (\mathrm{rot}\vec{A})_1\vec{i}_1 + (\mathrm{rot}\vec{A})_2\vec{i}_2 + (\mathrm{rot}\vec{A})_3\vec{i}_3,$$

$$(\mathrm{rot}\vec{A})_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}A_3 - \frac{\partial}{\partial x_3}A_2, \quad (\mathrm{rot}\vec{A})_2 = -\left(\frac{\partial}{\partial x_1}A_3 - \frac{\partial}{\partial x_3}A_1\right),$$

$$(\mathrm{rot}\vec{A})_3 = \frac{\partial}{\partial x_1}A_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}A_1.$$

Здесь и далее наряду с обозначениями x, y, z и A_x, A_y, A_z применяются обозначения x_1, x_2, x_3 и A_1, A_2, A_3, в выражениях с индексами по дважды встречающемуся индексу подразумевается суммирование от 1 до 3 (правило суммирования Эйнштейна).

Система уравнений Максвелла (1.1) является системой дифференциальных уравнений в частных производных относительно компонент $E_1(x_1,x_2,x_3,t)$, $E_2(x_1,x_2,x_3,t)$, $E_3(x_1,x_2,x_3,t)$ электрического поля $\vec{E}(x_1, x_2, x_3, t)$ и компонент $H_1(x_1, x_2, x_3, t)$, $H_2(x_1, x_2, x_3, t)$, $H_3(x_1, x_2, x_3.t)$ магнитного поля $\vec{H}(x_1, x_2, x_3, t)$.

Запишем систему векторных уравнений (1.1) в компонентах:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}E_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}E_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}E_1 = 4\pi\rho \tag{1.2а}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_2}E_3 - \dfrac{\partial}{\partial x_3}E_2 = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}H_1, \\ -\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}E_3 - \dfrac{\partial}{\partial x_3}E_1\right) = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}H_2, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}E_2 - \dfrac{\partial}{\partial x_2}E_1 = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}H_3, \end{cases} \tag{1.2б}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}H_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}H_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}H_3 = 0, \tag{1.2в}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_2}H_3 - \dfrac{\partial}{\partial x_3}H_2 = \dfrac{4\pi}{c}j_1 + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}E_1, \\ -\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}H_3 - \dfrac{\partial}{\partial x_3}H_1\right) = \dfrac{4\pi}{c}j_2 + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}E_2, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}H_2 - \dfrac{\partial}{\partial x_2}H_1 = \dfrac{4\pi}{c}j_3 + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}E_3, \end{cases} \tag{1.2г}$$

Здесь и далее у функций, как правило, опускаются аргументы x_1, x_2, x_3.

Важно понимать, что уравнения Максвелла - это система дифференциальных уравнений первого порядка (1.2), однако разного рода манипуляции с уравнениями удобно выполнять в векторной записи (1.1).

Электромагнитное поле проявляет себя механическим воздействием на заряды и токи. Выражение для силы, с которой электромагнитное поле действует на точечный заряд е, движущийся со скоростью $\vec{v}$, установлено экспериментально:

$$\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{H} \tag{1.3}$$

Эта сила называется *силой Лоренца*.

Если система задана непрерывным распределением зарядов ρ, то на бесконечно малый (точечный) заряд de=ρdV действует сила

$$d\vec{F} = de\vec{E} + \frac{de}{c}\vec{v} \times \vec{H} = \rho dV\vec{E} + \frac{\rho dV}{c}\vec{v} \times \vec{H} = (\rho\vec{E} + \frac{\rho}{c}\vec{v} \times \vec{H})dV,$$

или (с учетом $\vec{j} = \rho\vec{v}$)[2]

$$d\vec{F} = (\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j} \times \vec{H})dV. \tag{1.3'}$$

Выражение $\frac{d\vec{F}}{dV} = (\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j} \times \vec{H})$ естественно назвать плотностью силы Лоренца.

Строго говоря, рассматривать поведение электродинамических систем - зарядов, токов и порождаемого ими электромагнитного поля - нужно следующим образом: к системе уравнений Максвелла (1.1) следует добавить уравнение для силы действия электромагнитного поля на заряд (1.3') и уравнения механики, описывающие движение заряженного вещества под действием этой силы, - уравнения Ньютона. Но тогда все эти уравнения необходимо решать совместно, то есть нужно решать сложнейшую *систему нелинейных дифференциальных уравнений*! С физической точки зрения это означает, что мы должны учитывать действие электромагнитного поля на порождающие его токи и заряды. Корректное решение такой задачи даже в "простейшем" случае ускоряемого точечного заряда оказывается весьма затруднительным. Однако при внимательном рассмотрении можно убедится, что, если ускорение движущегося заряда не сверхбольшое ("достаточно плавные" движения), то обратным действием поля, излучаемого зарядом, на этот заряд можно пренебречь. При некоторых условиях такое действие можно

---

[2] Здесь и далее одно и то же уравнение, записанное в различных эквивилентных формах, имеет один номер; для различения формы записи используется штрих.

учесть как поправку. Обсуждение этих условий проводится в шестой главе пособия. Общий случай требует выхода далеко за рамки классической физики. Условие "достаточной плавности" движения выполняется для огромного числа физически интересных случаев. Впредь мы будем считать (с учетом вышеприведенных оговорок), что действием порожденного движущимися зарядами поля на движение этих зарядов можно пренебречь. Поэтому функции $\rho(x,y,z,t)$ и $\vec{j}(x,y,z,t)$ в системе уравнений Максвелла можно считать известными (подобно тому, как в классической механике считаются известными силы). В такой постановке наша задача по заданным (в естественных или искусственных системах, например, в атоме или антенне) зарядам ρ и токам $\vec{j}$ найти из уравнений Максвелла (1.1) неизвестные поля $\vec{E}(x,y,z,t)$ и $\vec{H}(x,y,z,t)$. А это *линейная задача*. В самом деле, дифференциальные операции взятия дивергенции и ротора, а также операция дифференцирования по времени линейны, ρ и $\vec{j}$ входят в уравнения в первой степени.

Линейность максвелловских уравнений соответствует фундаментальному физическому *принципу суперпозиции*:

Пусть решение уравнений Максвелла для ρ_1 и $\vec{j}_1$ - это $\vec{H}_1$ и $\vec{E}_1$, а для ρ_2 и $\vec{j}_2$ - $\vec{H}_2$ и $\vec{E}_2$. Тогда решением для $\rho=\rho_1+\rho_2$ и $\vec{j}=\vec{j}_1+\vec{j}_2$ будет $\vec{H}=\vec{H}_1+\vec{H}_2$ и. $\vec{E}=\overline{E}_1+\vec{E}_2$.

С одной стороны, принцип суперпозиции - просто *следствие* линейности уравнений Максвелла. С другой стороны, это *экспериментальный факт*, требующий линейности уравнений поля и существенно помогающий сформулировать правильные уравнения поля (1.1), если отталкиваться в их построении от эмпирических законов, полученных при анализе экспериментов, как это было исторически.

Обратимся теперь к другому важному следствию уравнений (1.1) - к *закону сохранения заряда*.

Применим к левой и правой части уравнения (1.1г) операцию взятия дивергенции. С учетом того, что $\operatorname{div}\operatorname{rot}\overline{H}=0$ (ротор - это всегда поле без источников, см. [1]), получаем

$$\frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial \operatorname{div}\vec{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial 4\pi\rho}{\partial t}=0.$$

Здесь использовано уравнение (1.1а). Окончательно, закон сохранения заряда в *дифференциальной форме* имеет вид:

$$\operatorname{div}\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0. \tag{1.4}$$

Особенно наглядно закон сохранения заряда выглядит в *интегральной форме*. Проинтегрируем соотношение (1.4) по некоторому объему V. После применения теоремы Гаусса получаем

$$\int\limits_V \operatorname{div}\vec{j}\,dv+\frac{\partial\int\limits_V\rho\,dv}{\partial t}=\int\limits_S\vec{j}\,d\vec{s}+\frac{\partial Q}{\partial t}=0.$$

Или

$$\int\limits_S\vec{j}\,d\vec{s}=-\frac{\partial Q}{\partial t}, \tag{1.4'}$$

где $Q=\int\limits_V\rho\,dv$ - полный заряд, находящийся в объеме V. Легко понять, что соотношение (1.4'), эквивалентное соотношению (1.4), выражает закон сохранения заряда. Действительно, $\int\limits_S\vec{j}\,d\vec{s}=\int\limits_S\rho\vec{v}\,d\vec{s}$ - количество заряда, протекающего в единицу времени через поверхность S, ограничивающую объем V, всегда равно изменению количества заряда в этом объеме $\frac{\partial Q}{\partial t}$. Знак минус в (1.4') соответствует тому обстоятельству, что при потоке наружу заряд Q убывает, при потоке внутрь - возрастает. Можно, таким образом, дать следующую формулировку закона сохранения заряда: во всех электродинамических явлениях заряд не может возникать или исчезать, заряд может лишь перетекать с одного места на другое.

Как при обсуждении принципа суперпозиции можно отметить следующее обстоятельство. С одной стороны, закон сохранения заряда, выражающийся математически в виде соотношения между ρ и $\vec{j}$ (1.4), - следствие уравнений Максвелла, если они постулированы. С другой стороны, как мы увидим ниже, это экспериментальный факт, имеющий существенное значения для построения правильных уравнений поля, если отталкиваться в их нахождении от эксперимента. Разумеется, *"вывести" уравнения Максвелла из экспериментальной информации о поведении электродинамических систем нельзя*, потому что эти уравнения (подобно уравнениям Ньютона в механике), являются *обобщением* множества экспериментальных фактов, раскрывающим сущность электромагнетизма и позволяющим предсказать новые явления.

Сделаем еще одно замечание общего порядка о системе уравнений Максвелла. В уравнениях (1.1б) и (1.1г) одновременно присутствуют электрическое поле $\vec{E}$ и магнитное поле $\vec{H}$, уравнения связывают $\vec{E}$ и $\vec{H}$, значит, эти поля не только порождаются зарядами и токами, но и влияют друг на друга (порождают друг друга). Поэтому в естественно применять термин "*электромагнитное поле*".

Ситуация изменяется, если мы будем рассматривать частный случай электродинамических систем, для которых заряды, токи и поля не зависят от времени. Такие системы называются *статическими*. В этом случае производные полей по времени равны нулю и система уравнений (1.1) распадается на две независимых системы по два уравнения для $\vec{E}$ и $\vec{H}$ соответственно:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho, & (1.5а) \\ \operatorname{rot}\vec{E} = 0, & (1.5б) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{H} = 0, & (1.5в) \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}. & (1.5г) \end{cases}$$

Система уравнений (1.5а,б) - это уравнения *электростатики*, а система (1.5в,г) - уравнения *магнитостатики*. Так что электрическое и магнитное поля в *статике* совершенно не зависят друг от друга, в отличие от случая *динамики*, описываемой общей системой уравнений поля с учетом зависимости от времени. Естественно рассмотреть вначале свойства и возможности решения статических уравнений. Сформулированные в статике понятия и приемы оказываются (после соответствующего обобщения) исключительно плодотворными и при развитии динамической теории электромагнитного поля.

1.2. Уравнения электростатики и их решение

Итак, запишем уравнения Максвелла для электростатики:

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho\,, \tag{1.6а}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0\,, \tag{1.6б}$$

Эти уравнения позволяют найти *электростатическое поле* $\vec{E}(x, y, z)$, создаваемое статическим распределением заряда ρ(x,y,z). Уравнение (1.6а), записанное в интегральной форме[3] называется *электростатической теоремой Гаусса*[4]:

$$\int\limits_S \vec{E}\,d\vec{s} = 4\pi Q, \tag{1.6а'}$$

где Q - заряд, находящийся внутри замкнутой поверхности S. Эта теорема выражает некоторое свойство электростатического поля, но этого свойства недостаточно для нахождения поля, так как не менее важно и второе уравнение, констатирующее безвихревой характер электростатического поля. Однако в некоторых случаях, когда имеется высокая степень симметрии распределения заряда, в том числе в важнейшем случае сферической симметрии, условие (1.6б) выполняется автоматически. Так для сферически симметрично распределенного заряда поле тоже будет сферически симметричным и, следовательно, ротор поля равен нулю (см. [1]). Теорема же Гаусса (1.6а') с учетом сферической симметрии поля позволяет найти поле.

---

[3] Нужно проинтегрировать (1.6а) по объему V и применить математическую теорему Гаусса по аналогии с выводом (1.4').

[4] Эту теорему можно прочитать так: поток электрического поля через замкнутую поверхность равен заряду, находящемуся внутри этой поверхности, умноженному на 4π.

Заметим, что соотношение (1.6а') справедливо и в динамике, ведь уравнение (1.6а) имеет одинаковый вид для статического и для динамического случаев.

Действительно, найдем поле вне равномерно заряженного шара радиуса R, в точке с радиус-вектором $\vec{r}$, выбрав в (1.6a') в качестве поверхности S концентрическую с шаром сферу радиуса r (r больше радиуса шара).

Выберем систему координат так, чтобы ее начало совпадало с центром шара. Так как поле сферически симметрично ($\vec{E}(x,y,z) = E(r)\frac{\vec{r}}{r}$) и $d\vec{s} = \frac{\vec{r}}{r}ds$, получаем

$$\int_S \vec{E}\, d\vec{s} = \int_S E(r)\frac{\vec{r}}{r}\frac{\vec{r}}{r}\, ds = \int_S E(r)\, ds = E(r)\, 4\pi r^2 = 4\pi Q.$$

То есть

$$E(r) = \frac{Q}{r^2},\ \vec{E}(x,y,z) \equiv \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\frac{\vec{r}}{r} = \frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{Q}{r^3}\vec{r}\,. \qquad (1.7)$$

А это - *кулоновское поле*. Конечно, выражение (1.7) справедливо не только для шара конечного радиуса, но и для точечного заряда[5].

Если точечный заряд e_1 находится не в центре системы координат, а в точке с радиус-вектором $\vec{r}_1$, то в выражении (1.7) нужно просто произвести сдвижку начала отсчета $\vec{r} \to \vec{r} - \vec{r}_1$. Тогда

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{e_1}{(r - r_1)^3}(\vec{r} - \vec{r}_1)\,. \qquad (1.7')$$

Соотношение (1.7') соответствует известному *закону Кулона*. Действительно, поле создаваемое зарядом e_1 в точке $\vec{r}_2$ согласно (1.7') равно $\vec{E}(\vec{r}_2) = \frac{e_1}{(r_2 - r_1)^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$. Поместим в точку $\vec{r}_2$ заряд e_2. На e_2 со стороны e_1 будет действовать сила (1.3)

---

[5] Это утверждение можно прокомментировать следующим образом. Выражение (1.7) действительно для шара сколь угодно малого радиуса. Будем уменьшать радиус шара до нуля, увеличивая ρ (до бесконечности) так, чтобы заряд шара Q оставался постоянным. К проблеме корректного математического описания такого распределения зарядов для записи соответствующей функции ρ(x,y,z) (везде нуль, а в начале координат бесконечность!?) мы вернемся ниже.

$$\vec{F}_{12} = e_2\vec{E}(\vec{r}_2) = \frac{e_1 e_2}{(r_2 - r_1)^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{e_1 e_2}{(r_2 - r_1)^2}\frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{(r_2 - r_1)}, \qquad (1.7'')$$

обратно пропорциональная квадрату расстояния и направленная по линии, соединяющей заряды.

Вместе с принципом суперпозиции полученного результата достаточно для того, чтобы записать общее решение уравнений электростатики (1.6а,б). В самом деле, поле, создаваемое системой точечных зарядов, будет просто векторной суммой полей, создаваемых каждым из зарядов:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum \vec{E}_i = \sum \frac{e_i}{(r - r_i)^3}(\vec{r} - \vec{r}_i)\,. \qquad (1.8)$$

Здесь

Непрерывное распределение зарядов, задаваемое плотностью ρ, можно представить как совокупность дискретных дифференциально малых (точечных) зарядов. Точечный заряд $de=\rho(\vec{r}\,')dv'$, находящийся в объеме dv', расположенном в точке с радиус-вектором $\vec{r}\,'$, создает в точке наблюдения $\vec{r}$ поле согласно (1.7'):

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r}\,')dv'}{(r - r')^3}(\vec{r} - \vec{r}\,')\,.$$

Суммарное же поле, создаваемое распределением ρ, - это интеграл по dv'

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{(r - r')^3}(\vec{r} - \vec{r}\,')dv' \qquad (1.8')$$

Здесь и далее, если область интегрирования не указана явно, интеграл берется по всему пространству, или по области пространства, занимаемой зарядами (что равносильно, так как вне этой области ρ=0). По построению понятно, что (1.8') и есть решение уравнений электростатики: электростатическое поле найдено по известному распределению заряда ρ.

Проведенные рассуждения вполне корректны, однако оставляют чувство некоторой неудовлетворенности. Ясно, что соотношения (1.8) и (1.8') эквивалентны, но обратный переход от непрерывного распределения зарядов к дискретному пока представляется затруднительным. Он требует введения понятия плотности для точечного заряда (см. комментарий к соотношению (1.7) в сноске 5).

Подойдем к решению уравнений электростатики (1.6а,б) с более тщательно проработанной математической точки зрения. Введенные ниже понятия и методы не только проясняют ситуацию, но и оказываются чрезвычайно полезными (после соответствующего обобщения) также при нахождении решений уравнений магнитостатики и общих уравнений динамики (1.1).

Так как согласно уравнению (1.6б) ротор электростатического поля равен нулю, оно является потенциальным (см. [1]), то есть может быть представлено в виде градиента скалярного поля, называемого потенциалом:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi \equiv -\vec{\nabla}\varphi \,. \tag{1.9}$$

Выбор знака в определении потенциала[6] в нашей власти. Знак "минус" в (1.9) выбран для удобства. Хотя функция φ пока также неизвестна, как и $\vec{E}$, ситуация упростилась: вместо трех неизвестных функций - компонент векторного поля $\vec{E}$, мы имеем дело с одной неизвестной функцией - скалярным полем φ. Уравнение (1.6б) при этом удовлетворено автоматически. Подставив (1.9) в уравнение (1.6а), получим

$$\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\varphi \equiv -\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi = -\Delta\varphi = 4\pi\rho$$

- *уравнение Пуассона*

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \,. \tag{1.10}$$

---

[6] Напомним читателю физический смысл потенциала. Вычислим работу A силы $\vec{F} = e\vec{E}$ при перемещении заряда e по контуру L от точки P_1 до точки P_2:

$$A = \int_L e\vec{E}d\vec{l} = -e\int_L \vec{\nabla}\varphi d\vec{l} = -e\int_L \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx_i = -e\int_L d\varphi = -e\int_{P_1}^{P_2} d\varphi = -e(\varphi(P_2) - \varphi(P_1))$$
$$= e\varphi_2 - e\varphi_1$$

Таким образом, произведение $e\varphi$ имеет смысл потенциальной энергии заряда e.

Вместо двух векторных дифференциальных уравнений первого порядка для поля $\vec{E}$ мы получили одно скалярное дифференциальное уравнение второго порядка для φ. Задача свелась к нахождению φ по известному ρ из уравнения Пуассона (1.10). Поле $\vec{E}$, согласно (1.9), находится простым вычислением градиента φ.

Прежде всего, естественно рассмотреть решение уравнения Пуассона, в "простейшем" случае: единичный точечный заряд находится в начале координат. Но как записать распределение плотности заряда ρ в этом случае?

Плотность заряда равномерно заряженного шара задается функцией

$$\rho(x,y,z) \equiv \rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & r > R \\ 0, & r < R \end{cases} \tag{1.11}$$

Под "плотностью единичного точечного заряда", следовательно, надо понимать предел при R→0, такой, что полный заряд шара $Q = \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3 = 1$ остается постоянным, В классическом смысле такой предел не существует, то есть функция ρ, задаваемая соотношениями[7]

$$\rho(x,y,z) \equiv \rho(r) = \begin{cases} \infty, & r = 0 \\ 0, & r > 0 \end{cases}, \quad \int \rho dv = 1$$

не является корректной. Однако известный английской физик-теоретик, один из создателей квантовой механики П. Дирак ввел такого рода функции и успешно применял их. Позже математик Л. Шварц дал строгое математическое описание этих объектов, развив теорию *обобщенных функций*.

Дадим определение *δ-функции Дирака*.

До сих пор мы имели дело с *объемным распределением* заряда (ρ - функция трех переменных x,y,z), рассмотрим *линейно распреде-*

---

[7] Напомним, что, если область интегрирования не указана явно, интеграл берется по всему пространству, или по области пространства, занимаемой зарядами (что равносильно, так как вне этой области ρ=0).

ленный заряд (ρ - функция одной переменой x). Для моделирования функции плотности "линейно распределенного точечного заряда" используем параметрическое семейство функций

$$\delta(\alpha, x) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} \qquad (1.12)$$

Вид функций этого семейства при α→0 (α=0.38, 0.28, 0.18, 0.08, 0,03) вблизи точки x=0 (-0.25<x<0.25) показан на рис.1. При уменьшении α пик становится все уже и выше, при этом функции $\delta(\alpha, x)$ остаются нормированными:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha, x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\frac{x}{\alpha}) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1.$$

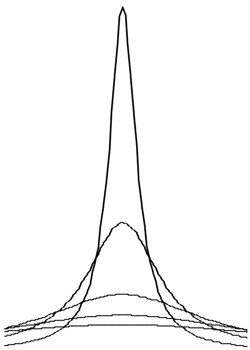

Рис.1. Семейство функций $\delta(\alpha, x)$.

Эти функции при α→0 все точнее моделируют плотность единичного линейно распределенного точечного заряда, находящегося в начале координат.

Формально определить δ-функцию Дирака можно как

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \to \infty} \delta(\alpha, x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\alpha \to \infty} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} = \begin{cases} \infty, \; x = 0 \\ 0, \; x \neq 0 \end{cases}.$$

По определению подразумевается, что $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$. То есть, $\delta(x)$ везде равна нулю и только при x=0 имеет бесконечно узкий и бесконечно высокий пик, площадь под которым равна единице. Читатель, уверенно владеющий понятием предела, вправе возмутится: *при x=0 предел не существует* - скажет он. Однако успокоим знатоков математики: при решении дифференциальных уравнений электродинамики в ответах функция плотности всегда появляется только под интегралом. Ответы для "линейно распределенного единичного точечного заряда" с плотностью ρ(x)=δ(x) имеют вид

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx$ и вполне корректны, если понимать их следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = \lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(\alpha,x)dx = f(0)\,. \qquad (1.13)$$

В последнем равенстве интеграл существует при любом сколь угодно малом α! Ответ - f(0) - очевиден. При малых α $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(\alpha,x)dx$ все точнее равен $f(0)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(\alpha,x)dx$, так как δ(α,x) отличны от нуля только вблизи x=0, кроме того, они нормированы $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(\alpha,x)dx = 1$.

Строго говоря, δ-функция имеет смысл только вместе со знаком интеграла, и тогда нужно понимать этот объект как функционал, "переводящий" *функцию* f(x) в *число* f(0) (см. определение (1.13)). Конкретный вид семейства функций, задающих в пределе δ-функцию не важен, важными являются свойства семейства: при α→0 пик становится сколь угодно узким, а площадь под графиком функции δ(α,x) остается равной единице. За подробностями отсылаем читателя к специальной математической литературе по теории обобщенных функций. Для наших целей приведенного определения δ-функции вполне достаточно.

Особую точку x=0 будем называть *точкой сингулярности*. Если провести сдвиг аргумента, то точка сингулярности соответственно сдвинется:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases}\infty, & x = x_0\\ 0, & x \neq x_0\end{cases}$$

С δ-функцией можно манипулировать под знаком интеграла как с обычной функцией. Приведем ряд свойств δ-функции:

$$\int\limits_a^b \delta(x - x_0)dx = \begin{cases}1, & x_0 \in [a,b]\\ 0, & x_0 \notin [a,b]\end{cases}, \qquad (1.14a)$$

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = \begin{cases} f(x_0), & x_0 \in [a,b] \\ 0, & x_0 \notin [a,b] \end{cases}, \qquad (1.14б)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0), \qquad (1.14б')$$

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|}\delta(x), \qquad (1.14в)$$

$$0\cdot\delta(x) = 0. \qquad (1.14г)$$

$$\delta(x) = \delta(-x). \qquad (1.14д)$$

Равенство (1.14б') соответствует определению (1.13). Это основополагающее равенство легко запомнить: *δ-функция интегрируется с какой-либо функцией, то интеграл снимается, причем значение аргумента у интегрируемой функции заменяется на значение аргумента в точке сингулярности δ-функции*.

Ясно, что равенства (1.14б') и (1.14б) эквивалентны, а (1.14а) следует из (1.14б). если положить $f(x)\equiv 1$. Равенства (1.14в,г,д), как и другие подобные равенства с δ-функцией, в которых отсутствует знак интеграла, означают, что левая и правая части равенства *дают один и тот же результат при интегрировании* с произвольной функцией f(x). Проверим справедливость (1.14в).

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(kx)dx = \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(kx)dkx = \begin{cases} \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y}{k}\right)\delta(y)dy \text{ при } k>0 \\ -\dfrac{1}{k}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y}{k}\right)\delta(y)dy \text{ при } k<0 \end{cases} =$$

$$= \frac{1}{|k|}f(0) = \frac{1}{|k|}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{|k|}\delta(x)dx$$

Здесь использована замена переменных kx=y. Легко проверить также соотношения (1.14г,д).

Теперь легко введем понятие функции плотности "объемно распределенного точечного заряда". Объемная плотность точечного заряда e, находящегося в начале координат, имеет вид:

$$\rho(x_1,x_2,x_3) \equiv \rho(\vec{r}) = e\delta(\vec{r}) \equiv e\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3),$$

а объемной плотности точечного заряда e, находящегося в точке с радиус-вектором $\vec{R}$ получается сдвигом аргумента

$$\rho(x_1, x_2, x_3) \equiv \rho(\vec{r}) = e\delta(\vec{r} - \vec{R}) .$$

Последняя функция везде равна нулю, а в точке $\vec{R}$ имеет δ-образную сингулярность. При интегрировании по любому объему V она дает значение e, если сингулярность попадает в этот объем, и нуль в противном случае:

$$\int_V \rho(\vec{r})dv = e\int_V \delta(\vec{r} - \vec{R})dv = \begin{cases} e, & \text{при } \vec{R} \in V \\ 0, & \text{при } \vec{R} \notin V \end{cases} .$$

Теперь можно записать уравнение Пуассона (1.10) для точечного заряда, находящегося в начале координат:

$$\Delta\varphi = -4\pi e\delta(\vec{r}) . \qquad (1.15)$$

Чтобы решить это уравнение, проинтегрируем левую и правую части равенства по шару V радиуса r, применим в левой части теорему Гаусса для перехода от объемного интеграла к поверхностному по сфере S, и, наконец, воспользуемся очевидной сферической симметрией решения:

$$\int_V \operatorname{div}\,\operatorname{grad}\varphi\, dv = \int_S \vec{\nabla}\varphi d\vec{s} = \int_S \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r}\frac{\vec{r}}{r}ds = \int_S \frac{\partial\varphi}{\partial r}ds = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\int_S ds = \frac{\partial\varphi}{\partial r}4\pi r^2 =$$
$$= -4\pi e\int_V \delta(\vec{r})dv = -4\pi e.$$

Отсюда $\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{e}{r^2}$ и, следовательно,

$$\varphi = \frac{1}{r} + c . \qquad (1.16)$$

Найденное решение - это *кулоновский потенциал*. Потенциал всегда, согласно (1.9), определен с точностью до аддитивной постоянной. Эта постоянная может быть фиксирована заданием значения потенциала в какой-нибудь точке пространства. Для кулоновского потенциала обычно выбирают c=0 (то есть считают, что на бесконечности потенциал равен нулю). По потенциалу легко вычислить поле

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\frac{1}{r} = e\frac{\vec{r}}{r^3}\ .$$

Таким образом, закон Кулона получен нами как решение электростатических уравнений Максвелла для точечного заряда.

Решим теперь уравнение Пуассона (1.10) в общем виде, с произвольной правой частью $\rho(\vec{r})$. Для этого введем важное математическое понятие *функции Грина*. Назовем функцией Грина оператора Лапласа решение уравнения Пуассона с правой частью равной $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$:

$$\Delta G(\vec{r},\vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}'). \tag{1.17}$$

Лапласиан здесь берется по переменной $\vec{r}$:

$$\Delta \equiv \Delta_{\vec{r}} = \frac{\partial}{\partial\vec{r}}\frac{\partial}{\partial\vec{r}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\ .$$

В физической терминологии $G(\vec{r},\vec{r}')$ - это потенциал в точке $\vec{r}$ (x_1,x_2,x_3), создаваемый единичным точечным зарядом, находящимся в точке (x'_1,x'_2,x'_3).

Если мы знаем функцию Грина оператора Лапласа, то мы можем легко записать решение уравнения Пуассона (1.10) с произвольной правой частью:

$$\varphi(\vec{r}) = \int G(\vec{r},\vec{r}')\,\rho(\vec{r}')dv'. \tag{1.18}$$

Проверим его формально, подстановкой в уравнение (1.10)

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = \Delta\int G(\vec{r},\vec{r}')\,\rho(\vec{r}')dv' = \int \Delta G(\vec{r},\vec{r}')\,\rho(\vec{r}')dv' =$$
$$-4\pi\int \delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\rho(\vec{r}')dv' = -4\pi\rho(\vec{r}).$$

Следовательно, задача свелась к нахождению функции Грина из уравнения (1.17). Перейдем в этом уравнении от переменных $\vec{r}$, $\vec{r}'$ к переменным $\vec{r}-\vec{r}'$, $\vec{r}'$:

$$\Delta_{\vec{r}-\vec{r}'}G(\vec{r}-\vec{r}',\vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}'). \tag{1.19}$$

Переход к новой переменной в лапласиане

$$\Delta \equiv \Delta_{\vec{r}} = \frac{\partial}{\partial\vec{r}}\frac{\partial}{\partial\vec{r}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial(x_i - x'_i)}\frac{\partial}{\partial(x_i - x'_i)} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial(\vec{r}-\vec{r}')}\frac{\partial}{\partial(\vec{r}-\vec{r}')} = \Delta_{\vec{r}-\vec{r}'}$$

объясняется известным свойством производных

$$\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial(x_j - x'_j)} \frac{\partial(x_j - x'_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial(x_j - x'_j)} \delta_{ij} = \frac{\partial}{\partial(x_i - x'_i)} \equiv \frac{\partial}{\partial(\vec{r} - \vec{r}')}. \tag{1.20}$$

Из (1.19) видно, что функция Грина не зависит от $\vec{r}'$ (так как правая часть уравнения не зависит от $\vec{r}'$), а зависит только от разности $\vec{r} - \vec{r}'$. Но тогда для уравнения $\Delta_{\vec{r}-\vec{r}'} G(\vec{r} - \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ решение можно записать по аналогии с решением (1.16) уравнения (1.15).

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{1.21}$$

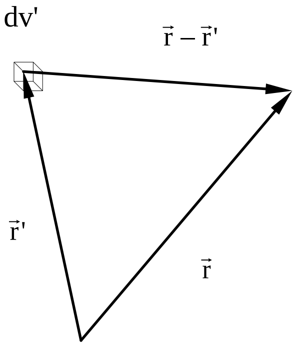

Рис.2. К интерпретации формулы (1.22).

Это решение отличается от (1.16) трансляцией (переносом) на вектор $\vec{r}'$. Физическая картина, соответствующая этим математическим результатам, абсолютно ясна[8].

Запишем теперь в явном виде решение (1.18) уравнения Пуассона (1.10)

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'. \tag{1.22}$$

Дифференциально малый заряд $de = \rho(\vec{r}')dv'$, находящийся в объеме

[8] Отметим, что полученные результаты справедливы только в случае известного распределения зарядов. Если в статической системе зарядов имеются проводники, ситуация меняется. Заряды могут свободно перемещаться по проводнику, они всегда перераспределяются так, что потенциал на поверхности проводника постоянен. В самом деле, наличие разности потенциалов означает ненулевой градиент - электрическое поле, которое приводит к перемещению заряда, компенсирующему разность потенциалов. Математически задача становится иной. Мы не будем рассматривать здесь такую постановку вопроса.

dv', расположенном в точке $\vec{r}'$, создает в точке наблюдения $\vec{r}$ кулоновский потенциал $\dfrac{\rho(\vec{r}')dv'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ (см. рис.2). Суперпозиция (интеграл) дает потенциал (1.22) , создаваемый всем распределением ρ.

Электрическое поле находится простым вычислением градиента. Получаем результат (1.8'):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{(r-r')^3}(\vec{r}-\vec{r}')dv' .$$

Для дискретного распределения зарядов $\rho(\vec{r}') = \sum e_i \delta(\vec{r}'-\vec{r}_i)$, где $\vec{r}_i$ - радиус-вектор точки, в которой находится заряд e_i. Подставив $\rho(\vec{r}')$ в (1.8'),

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{\sum e_i \delta(\vec{r}'-\vec{r}_i)}{(r-r')^3}(\vec{r}-\vec{r}')dv' = \sum \int \frac{e_i \delta(\vec{r}'-\vec{r}_i)}{(r-r')^3}(\vec{r}-\vec{r}')dv' = \sum \frac{e_i}{(r-r_i)^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

получаем результат (1.8) для системы точечных зарядов.

Итак, электростатические уравнения Максвелла (1.6а,б) дают в качестве решения кулоновское поле. Когда имеется не один точечный заряд, а система зарядов - дискретно или непрерывно распределенных - решение дается принципом суперпозиции, соответствующим линейности уравнений Максвелла.

Полезно отметить, что в электростатике можно провести рассуждения в обратном порядке. *Экспериментально установленные закон Кулона и принцип суперпозиции однозначно приводят к уравнениям электростатики для поля* (1.6а,б). Действительно, прямое применение операций div и rot к выражению (1.8') с учетом соотношения

$$\Delta G(\vec{r},\vec{r}') = \Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

показывает, что электрическое поле удовлетворяет уравнениям (1.6а,б). В этом смысле понятие поля в электростатике можно было бы с полным правом рассматривать как чисто вспомогательное, не дающие ничего нового, просто удобные для математических манипуляций. Однако мы не напрасно потратили значительные усилия. Сформулированные здесь понятия и приемы оказываются исключительно полезными при обсуждении поведения динамических систем. В динамике выясняется, что поле - это самостоятельная фундаментальная физическая сущность, весьма существенно обогащающая наше представление о мире.

1.3. Мультипольное разложение электростатического поля

Мы получили общее решение $\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dv'$ (1.22) уравнения Пуассона. Всегда полезно проанализировать общее решение в частных и предельных случаях. Рассмотрим структуру электростатического поля на далеких расстояниях от ограниченной системы зарядов.

Обозначим через L характерные размеры системы, поместим начало системы координат в какую-нибудь точку внутри системы зарядов. Тогда условия ограниченности системы и удаленности точки наблюдения $\vec{r}$ от системы означают: $|\vec{r}\,'| \equiv r' < L << |\vec{r}| \equiv r$, то есть отношение $\frac{r'}{r}$ мало. По нему и следует провести асимптотическое разложение функции Грина $G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$ на далеких расстояниях.

Преобразуем функцию Грина следующим образом:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{\left[(\vec{r} - \vec{r}\,')(\vec{r} - \vec{r}\,')\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\left(r^2 - 2\vec{r}\vec{r}\,' = r'^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{r}\left(1 - 2\frac{\vec{r}}{r}\frac{\vec{r}\,'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Применим формулу для разложения в биномиальный ряд

$$(1 + x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \ldots, \quad (1 + x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \ldots$$

Ограничимся первыми тремя членами разложения.

$$\frac{1}{r}\left(1 - 2\frac{\vec{r}}{r}\frac{\vec{r}\,'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\left(-2\frac{\vec{r}}{r}\frac{\vec{r}\,'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}\right) + \frac{3}{8}\left(-2\frac{\vec{r}}{r}\frac{\vec{r}\,'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}\right)^2\right] =$$

$$=\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^3}+\frac{3(\vec{r}\vec{r}')^2-r^2r'^2}{2r^5}. \qquad (1.23)$$

Подстановка этого разложения в (1.22) дает три слагаемых в потенциале

$$\varphi=\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\ldots\ .$$

Обсудим каждое из них.

Ведущий член разложение имеет вид

$$\varphi_0=\int\frac{1}{r}\rho(\vec{r}')dv'=\frac{1}{r}\int\rho(\vec{r}')dv'=\frac{Q}{r},$$

где Q - полный заряд системы. Его физический смысл прост: на далеких расстояниях от системы поле является кулоновским полем точечного заряда Q.

Следующий член разложения - первая поправка (он становится ведущим, если система электронейтральна Q=0),

$$\varphi_1=\int\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^3}\rho(\vec{r}')dv'=\frac{\vec{r}}{r^3}\int\rho(\vec{r}')\vec{r}'dv'=\frac{\vec{d}\vec{r}}{r^3},$$

где

$$\vec{d}=\int\rho(\vec{r}')\vec{r}'dv' \qquad (1.24)$$

- *дипольный момент* системы зарядов.

Вычислим дипольный момент системы, состоящей из двух зарядов: +e находится в точке $\vec{r}_+$, -e находится в точке $\vec{r}_-$. Функция ρ имеет вид $\rho(\vec{r}')=e\delta(\vec{r}'-\vec{r}_+)-e\delta(\vec{r}'-\vec{r}_-)$.

Согласно (1.24),

$$\vec{d}=\int\rho(\vec{r}')\vec{r}'dv'=$$

$$=\int(e\delta(\vec{r}'-\vec{r}_+)-e\delta(\vec{r}'-\vec{r}_-))\vec{r}'dv'=$$

$$=e\vec{r}_+-e\vec{r}_-=e(\vec{r}_+-\vec{r}_-)=e\vec{L}.$$

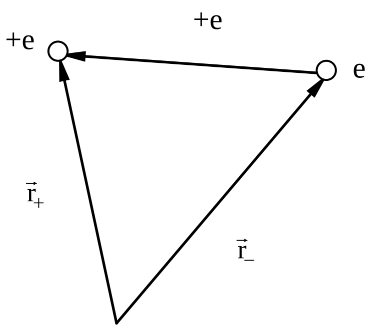

Рис.3.Электрический диполь (1.24).

Через $\vec{L}$ обозначен вектор, соединяющий заряд -e с зарядом e (рис.3). Часто удобно говорить о точечном диполе, то есть устремлять $|\vec{L}|$ к нулю, одновременно увеличивая заряд e так, чтобы модуль дипольного момента d оставался постоянным.

Дипольный вклад в поле системы зарядов на далеких расстояниях - поле точечного диполя с дипольным моментом $\vec{d} = \int \rho(\vec{r}\,')\vec{r}\,'dv'$, эффективно характеризующим степень асимметрии распределения положительного и отрицательного заряда в системе[9].

Мы работаем с потенциалом, но легко вычислить электрическое поле электрического диполя:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\frac{\vec{d}\vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{d}}{r^3} + \frac{3\vec{r}(\vec{d}\vec{r})}{r^5} = \frac{3\vec{n}(\vec{n}\vec{d}) - \vec{d}}{r^3} \qquad (1.25)$$

Здесь $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ - единичный вектор, направленный на точку наблюдения.

Следующий член разложения - *квадрупольный*. Запишем слагаемое φ_2 в компонентах и вынесем компоненты вектора $\vec{r} \equiv x_i$ за знак интеграла:

$$\varphi_2 = \frac{1}{2r^5}\int \rho(\vec{r}\,')(3(\vec{r}\vec{r}\,')^2 - r^2r'^2)dv' = \frac{1}{2r^5}\int \rho(\vec{r}\,')(3x_\alpha x'_\alpha x_\beta x'_\beta - \delta_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta r'^2)dv' =$$

$$= \frac{x_\alpha x_\beta \int \rho(\vec{r}\,')(3x'_\alpha x'_\beta - \delta_{\alpha\beta}r'^2)dv'}{2r^5} = \frac{Q_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta}{2r^5},$$

где

$$Q_{\alpha\beta} = \int \rho(\vec{r}\,')(3x'_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta}r'^2)dv' \qquad (1.26)$$

- *квадрупольный момент* системы.

Полученное разложение потенциала

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{d}\vec{r}}{r^3} + \frac{Q_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta}{2r^5} + \ldots$$

---

[9] Отметим, что дипольный момент электронейтральной системы не меняется при сдвиге системы координат: $\vec{r} \Rightarrow \vec{r} + \vec{a}$, $\vec{d}_{нов} = \int(\vec{r} + \vec{a})\rho dv = \vec{d} + Q\vec{a} = \vec{d}$. Дипольный момент точечного заряда, находящегося в точке $\vec{r}$, равен $e\vec{r}$.

называется *мультипольным разложением*. Мультипольные моменты - это вышеприведенные интегральные характеристики функции распределения заряда ρ: Q - скаляр, $\vec{d}$ - вектор, $Q_{\alpha\beta}$ - тензор второго ранга.

При вращении системы координат, задаваемом ортогональной матрицей a_{ij}, компоненты квадрупольного момента преобразуются по закону преобразования тензора второго ранга

$$Q'_{\mu\nu} = a_{\mu\alpha} a_{\nu\beta} Q_{\alpha\beta} = a_{\mu\alpha} Q_{\alpha\beta} a^{T}{}_{\beta\nu}.$$

Но это преобразование соответствует преобразованию подобия, известному из высшей алгебры. Так как матрица $Q_{\alpha\beta}$ симметрична, можно подобрать матрицу вращения так, что в новой системе координат квадрупольный момент будет задаваться диагональной матрицей (система главных осей). Кроме того, из определения (1.26) видно, что след тензора равен нулю $Q_{\alpha\alpha} = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0$. Если имеется аксиальная (вращательная) симметрия относительно оси x_1, то $Q_{22} = Q_{33}$. Значит, в случае аксиальной симметрии распределения зарядов тензор квадрупольного момента задается одном параметром $Q = Q_{11}$, ненулевые диагональные элементы имеют вид: $Q_{11} = Q$, $Q_{22} = -\frac{1}{2}Q$, $Q_{33} = -\frac{1}{2}Q$.

В мультипольном разложении потенциала электронейтральной системы с нулевым дипольным моментом ведущим является квадрупольный вклад. На рис.4а,б приведены две простейших системы такого рода, называемые квадруполями.

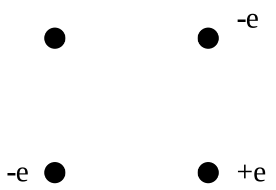

Рис.4а. Квадруполь.

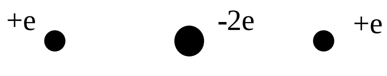

Рис.4б. Линейный квадруполь.

Для системы зарядов с аксиально-симметричным распределением квадрупольный вклад в электростатическое поле на далеких расстояниях соответствует эффективному представлению системы в виде точечного квадруполя типа приведенных на рис.4а,б. Теперь хорошо понятен термин "мультипольный", он означает "многополюсный". Смысл мультипольного разложения в том, что для определения структуры поля на расстояниях, много больших, чем характерные размеры системы, неважно детальное знание распределения, важны интегральные характеристики - мультипольные моменты.

Понятие мультипольных моментов оказывается полезным и в другой ситуации. Поместим систему зарядов (плотность $\rho(\vec{r})$ задана) во внешнее поле[10]. Найдем *энергию системы во внешнем поле* $\vec{E}$. Энергия просто выражается через потенциал поля φ: $U=\int\rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})dv$ (см. сноску 6). Интересен предельный случай этого выражения, когда поле меняется медленно (не резко), то есть изменение поля на расстояниях порядка размеров системы, существенно меньше величины поля. В этом случае, выбрав за начало системы координат какую-нибудь точку внутри системы, можно представить потенциал в виде быстро сходящегося ряда Тейлора:

$$\varphi(\vec{r})=\varphi(0)+x_\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{2}x_\alpha x_\beta\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}+\ldots=\varphi(0)-\vec{r}\vec{E}(0)-\frac{1}{2}x_\alpha x_\beta\frac{\partial E_\beta(0)}{\partial x_\alpha}+\ldots=$$

$$=\varphi(0)-\vec{r}\vec{E}(0)-\frac{1}{6}\left(3x_\alpha x_\beta-r^2\delta_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial E_\beta(0)}{\partial x_\alpha}+\ldots\ .$$

Здесь использовано выражение поля $\vec{E}$ через потенциал $E_\alpha=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}$ (1.9). Дополнительное слагаемое пропорциональное $\delta_{\alpha\beta}\dfrac{\partial E_\beta(0)}{\partial x_\alpha}=\dfrac{\partial E_\alpha(0)}{\partial x_\alpha}=\mathrm{div}\vec{E}$ введено для удобства, оно равно нулю, так

---

[10] Внешнее поле $\vec{E}$ создается удаленными зарядами, они нас не интересуют. В области пространства, где находится наша система, этих зарядов нет, поэтому $\mathrm{div}\vec{E}=0$.

как *дивергенция внешнего поля равна нулю* (см. сноску 10). Подстановка разложения потенциала в формулу для энергии дает ответ, выражающийся через мультипольные моменты системы:

$$U = Q\varphi(0) - \vec{d}E(0) - \frac{1}{6}Q_{\alpha\beta}\frac{\partial E_\beta(0)}{\partial x_\alpha} + \dots \ .$$

Неформально это можно прочитать так: энергия заряда определяется потенциалом, энергия диполя - вектором поля, энергия квадруполя - градиентом поля.

Отметим, что энергия диполя во внешнем поле $U_{dip} = -dECos\theta$ минимальна, когда угол θ между $\vec{d}$ и $\vec{E}$ равен нулю. Это значит, что диполь стремится ориентироваться по полю. Ориентируем систему координат, так чтобы вектора $\vec{d}$ и $\vec{E}$ лежали в плоскости xy. Как известно их механики, z-компонента момента силы $\vec{N}$, приложенного к системе, равна $-\frac{\partial U}{\partial\theta}$, то есть $N_z = -dESin\theta$. В векторном виде это можно записать как

$$\vec{N} = \vec{d}\times\vec{E}\,. \qquad (1.27)$$

Опыт, полученный при рассмотрении вопросов электростатики, оказывается весьма полезным при решении проблем магнитостатики, хотя магнитостатическое поле, подчиняющееся уравнениям (1.5в,г), имеет иные свойства, чем электростатическое поле.

2. Магнитостатика

2.1. Решение уравнений магнитостатики

Статическое магнитное поле, согласно уравнениям Максвелла

$$\mathrm{div}\vec{H} = 0\,, \qquad (2.1а)$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}\,, \qquad (2.1б)$$

является полем без источников, а его ротор пропорционален плотности тока.

как *дивергенция внешнего поля равна нулю* (см. сноску 10). Подстановка разложения потенциала в формулу для энергии дает ответ, выражающийся через мультипольные моменты системы:

$$U = Q\varphi(0) - \vec{d}E(0) - \frac{1}{6}Q_{\alpha\beta}\frac{\partial E_\beta(0)}{\partial x_\alpha} + \dots \ .$$

Неформально это можно прочитать так: энергия заряда определяется потенциалом, энергия диполя - вектором поля, энергия квадруполя - градиентом поля.

Отметим, что энергия диполя во внешнем поле $U_{dip} = -dE\mathrm{Cos}\theta$ минимальна, когда угол θ между $\vec{d}$ и $\vec{E}$ равен нулю. Это значит, что диполь стремится ориентироваться по полю. Расположим систему координат, так чтобы вектора $\vec{d}$ и $\vec{E}$ лежали в плоскости xy. Как известно их механики, z-компонента момента силы $\vec{N}$, приложенного к системе, равна $-\frac{\partial U}{\partial\theta}$, то есть $N_z = -dE\mathrm{Sin}\theta$. В векторном виде это можно записать как

$$\vec{N} = \vec{d} \times \vec{E}\,. \tag{1.27}$$

Опыт, полученный при рассмотрении вопросов электростатики, оказывается весьма полезным при решении проблем магнитостатики, хотя магнитостатическое поле, подчиняющееся уравнениям (1.5в,г), имеет иные свойства, чем электростатическое поле.

2. Магнитостатика

2.1. Решение уравнений магнитостатики

Статическое магнитное поле, согласно уравнениям Максвелла

$$\mathrm{div}\vec{H} = 0\,, \tag{2.1а}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}\,, \tag{2.1б}$$

является полем без источников, а его ротор пропорционален плотности тока.

Применим операцию взятия дивергенции к соотношению (2.1б). Так как дивергенция ротора равна нулю, получаем, что в случае статики

$$\mathrm{div}\vec{j} = 0 . \qquad (2.2)$$

Это закон сохранения заряда (1.4) для стационарного (не зависящего от времени тока). Соответствующая интегральная формулировка $\int\limits_S \vec{j}d\vec{s} = 0$ показывает, что количество втекающего (в единицу времени) в замкнутую поверхность заряда равно количеству вытекающего заряда. Стационарный ток, текущий по тонкому контуру (назовем его *линейным или контурным*), *должен быть замкнут*, чтобы не нарушалось условие (2.2). Удобная модель тока приходящего из бесконечности и уходящего на бесконечность тоже корректна. Хотя, разумеется, реально всегда мы имеем дело с ограниченным распределением токов.

Уравнение (2.1б) по аналогии с уравнением электростатики (1.6а) позволяет при наличии аксиальной симметрии распределения тока найти магнитное поле, конечно, тоже являющееся аксиально-симметричным с помощью теоремы Стокса. При этом уравнение (2.1а) удовлетворено автоматически. Читателю полезно провести такие вычисления в качестве упражнения. Однако теперь у нас есть средства для решения задачи в общем виде.

Проанализируем уравнение (2.1а). Из векторного анализа известно, что дивергенция ротора всегда равна нулю. На самом деле справедливо и обратное утверждение: *если дивергенция поля* $\vec{H}$ *равна нулю, а ротор* $\vec{H}$ *стремится к нулю на бесконечности, то это поле может быть представлено в виде ротора некоторого другого поля* $\vec{A}$. Это утверждение является частью теоремы Гельмгольца. Введенных выше понятий и полученных результатов достаточно для ее доказательства, но оставим это доказательство для курса математики. Подробности можно найти в книге[8]. Для нас же важно, что магнитостатическое (будем говорить просто магнитное) поле можно представить в виде

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A} . \qquad (2.3)$$

Векторное поле $\vec{A}$ называется вектор-потенциалом.

Статус вектор-потенциала в магнитостатике аналогичен статусу скалярного потенциала φ в электростатике. Вектор-потенциал $\vec{A}$ магнитного поля $\vec{H}$ пока также неизвестен, как и само поле, но благодаря соотношению (2.3) уравнение (2.1а) удовлетворяется автоматически. Подставив (2.3) в (2.1б), получим уравнение для вектор-потенциала

$$\text{rot rot}\vec{A} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}\,. \qquad (2.4)$$

Если бы не дополнительное слагаемое $\vec{\nabla}(\nabla \cdot \vec{A}) \equiv \text{grad}\,\text{div}\vec{A}$, полученное уравнение было бы уравнением Пуассона, а решение последнего мы знаем. Правда, не видно никаких причин, почему уравнение для вектор-потенциала должно быть уравнением Пуассона. Как же действовать дальше?

Есть еще одна "неприятность". Соотношение (2.4) между полем $\vec{H}$ и потенциалом $\vec{A}$ в магнитостатике более "изощренное", чем соотношение (1.9) между полем $\vec{E}$ и потенциалом φ. Скалярный потенциал φ определен с точностью до аддитивной постоянной. Эту неоднозначность, впрочем, мы используем для нормировки, то есть фиксации значения φ в какой-нибудь точке пространства. В магнитостатике же *вектор-потенциал определен с точностью до градиента произвольной скалярной функции*. Действительно, если от $\vec{A}$ перейти к другому вектор-потенциалу $\vec{A}'$ посредством преобразования

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi\,, \qquad (2.5)$$

где $\chi(\vec{r})$ - произвольная функция, то поле $\vec{H}$ останется неизменным, так как ротор градиента всегда нуль. Именно поле является наблюдаемой физической величиной, проявляющей себя в действии на токи посредством силы Лоренца. Вектор-потенциал в классической электродинамике - это вспомогательная величина, к тому же задаваемая неоднозначно. Преобразование (2.5) называется *градиентным (или иначе - калибровочным)*. Оно показывает, что данному магнитному полю соответствует целый класс вектор-потенциалов; один экземпляр вектор-потенциала из этого класса отличается от другого на градиент скалярной функции.

После того как проблемы поставлены, попросим читателя быть очень внимательным, чтобы проследить логику их разрешения. Подобные рассуждения будут проведены впоследствии при решении динамических уравнений Максвелла.

Неоднозначность (2.5) в выборе вектор-потенциала, не только не является "проблемой", но, наоборот, помогает упростить уравнение (2.4). Выберем из класса всех вектор-потенциалов, соответствующих магнитному полю $\vec{H}$, такие вектор-потенциалы, дивергенция которых равна нулю. Это упростит уравнение (2.4), превратив его в уравнение Пуассона! Обоснуем эти действия.

Пусть дивергенция используемого нами для описания поля $\vec{H}$ потенциала $\vec{A}$ есть некоторая скалярная функция $f(\vec{r})$ не равная нулю: $\mathrm{div}\vec{A} = f(\vec{r}) \neq 0$. С помощью преобразования (2.5) перейдем к другому потенциалу $\vec{A}'$, не фиксируя пока функцию перехода χ, и найдем дивергенцию $\vec{A}'$:

$$\mathrm{div}\vec{A}' = \mathrm{div}\vec{A} + \Delta\chi = f(\vec{r}) + \Delta\chi\,.$$

Подберем теперь χ так, чтобы $\Delta\chi = -f(\vec{r}) = -\mathrm{div}\vec{A}$. Это уравнение Пуассона (снова оно!) относительно неизвестной функции χ. Мы знаем, что решение этого уравнения существует (даже знаем явный вид, хотя здесь это неважно). Значит подбором χ можно обнулить дивергенцию вектор-потенциала. Впредь в магнитостатике мы будем пользоваться потенциалом, удовлетворяющим условию

$$\mathrm{div}\vec{A} = 0 \qquad (2.6)$$

Это условие называется *калибровкой Кулона*. Калибровка Кулона не фиксирует используемый вектор-потенциал однозначно, по-прежнему допустимы градиентные преобразования, но с функцией $\chi(\vec{r})$, удовлетворяющей уравнению Лапласа $\Delta\chi = 0$. Такие преобразования оставляют нас в подклассе потенциалов, удовлетворяющих калибровке Кулона.

Проведенные рассуждения могут показаться читателю необычными. Однако, они совершенно корректны: мы имеем право манипулировать с решением, хотя мы его еще и не знаем, но мы знаем его свойства, которыми вправе пользоваться. Нечто похожее происходит к механике, когда в рассуждениях используется закон сохранения энергии, то есть свойство решений уравнений Лагранжа, хотя сами решения неизвестны.

Уравнение (2.4) для вектор-потенциала в калибровке Кулона имеет вид:

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\,. \qquad (2.7)$$

Его решение легко записать по аналогии с решением (1.22) уравнения Пуассона (1.10) для скалярного потенциала φ:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dv'. \qquad (2.8)$$

Магнитное поле легко находится вычислением ротора $\vec{A}$:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\vec{A} \equiv \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}A_k = \frac{1}{c}\int\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{j_k(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dv' = \frac{1}{c}\int\varepsilon_{ijk}j_k(-1)\frac{x_j - x_j{}'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}dv' \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{c}\int\frac{\vec{j}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}dv'\,. \qquad (2.9)$$

Это решение подобно решению (1.8') уравнений электростатики. Если (1.8') соответствует закону Кулона, то (2.9) выражает закон Био-Савара-Лапласа. Запишем его в более "привычной" форме. Для этого перейдем от объемно распределенного тока к линейному току, текущему по бесконечно тонкому контуру. На рис.5. изображен элемент объема dv тонкого проводника с током. Преобразуем выражение $\vec{j}dv$, входящее в интеграл по объему (2.9) следующим образом:

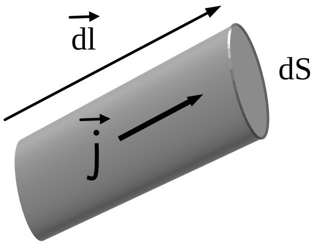

Рис.5. Элемент объема тонкого проводника.

$$\vec{j}dv = \vec{j}dSdl = jdSd\vec{l} = Id\vec{l}\,. \qquad (2.10)$$

Здесь значок вектора перенесен с j на dl, потому что они имеют одно и то же направление, I=jdS - полный ток, текущий по проводнику. Будем называть выражение $Id\vec{l}$ *элементом (линейного) тока.* Подстановка (2.10) позволяет легко переходить от объемных интегралов к контурным и обратно. Перейдем в (2.9) к интегралу по замкнутому контуру:

$$\vec{H}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}dv' = \frac{I}{c}\oint \frac{d\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}. \qquad (2.11)$$

Можно записать это выражение и в дифференциальной форме, это просто подынтегральное выражение, в котором для удобства надо положить $\vec{r}\,'=0$ (перенести начало отсчета в точку, где находится элемент тока $Id\vec{l}$):

$$d\vec{H} = \frac{I}{c}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} \qquad (2.12)$$

Это выражение - аналог закона Кулона для поля точечного заряда, такое магнитное поле создает в пространстве линейный элемент тока $Id\vec{l}$. Полезно, однако, прокомментировать статус закона Био-Савара-Лапласа, записанного в дифференциальной форме (2.12): *изолированный элемент тока* $Id\vec{l}$ *не может существовать, так как это нарушало бы закон сохранения заряда* (2.2), реально, магнитное поле - это всегда суперпозиция вкладов от элементов тока замкнутого контура (2.11).

Подобные рассуждения можно провести и для силы Лоренца (1.13'). Сила, действующая на линейный элемент тока $Id\vec{l}$, помещенный в магнитное поле $\vec{H}$, дается выражением

$$d\vec{F} = \frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{H}dV = \frac{I}{c}d\bar{l}\times\vec{H}. \qquad (2.13)$$

Здесь использован переход (2.10). Конечно, в магнитное поле всегда помещается замкнутый контур с током, а не отдельный элемент тока.

Как видно из проведенных рассуждений, в магнитостатике можно отметить много аналогий с электростатикой, впрочем, имеется и своя специфика.

В электростатике мы не только получили закон Кулона из статических уравнений Максвелла, но и провели обратные рассуждения: показали, что уравнения Максвелла для электростатического поля могут быть получены из закона Кулона и принципа суперпозиции. Ситуация там была не слишком сложной, так как в электростатике соотношение между полем и силой, с которой оно действует на заряд, очень простое $\vec{F} = e\vec{E}$. Фактически это определение электрического поля (оно численно равно силе, действующей на единичный заряд).

Полезно и поучительно проследить *путь от эксперимента к уравнениям для поля и в магнитостатике*. Поле можно определить только через силу. В магнитостатике же соотношение поле - сила, действующая на элемент тока (2.13), более сложное, чем в электростатике. Исторически требовался тщательный анализ этого соотношения, что являлось непростой теоретической и экспериментальной задачей. Ведь отдельно взятый элемент тока $Id\vec{l}$ существовать не может, и магнитное поле вначале изучалось с помощью магнитной стрелки, то есть *магнитного диполя, создаваемого внутренними атомно-молекулярными токами*. Это сильно затрудняло понимание природы магнетизма, не сразу была понята связь магнетизма и тока. Лишь с созданием источников постоянного тока и проведением экспериментов с проводниками, по которым течет ток, ситуация прояснилась.

Попробуем вначале из закона Био-Савара-Лапласа (2.12) как решения магнитостатических уравнений Максвелла и постулированного выражения для силы Лоренца (1.3') предсказать эффекты, которые можно наблюдать в эксперименте с контурными токами.

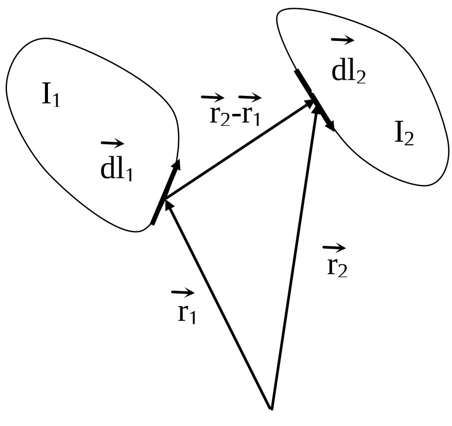

Рис.6. К выводу закона Ампера.

Закон Кулона определяет силу взаимодействия двух точечных зарядов. Выведем соответствующий "закон Кулона" для магнитостатики, то есть определим силу взаимодействия двух элементов тока (рис.6): $I_1 d\vec{l}_1$, находящегося в точке $\vec{r}_1$, и $I_2 d\vec{l}_2$, находящегося в точке $\vec{r}_2$.

Согласно (2.12), элемент тока $I_1 d\vec{l}_1$ создает в точке $\vec{r}_2$ магнитное поле

$$d\vec{H}_{12} = \frac{I_1}{c} \frac{d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} .$$

Это поле действует на элемент тока $I_2 d\vec{l}_2$ с силой $d\vec{F}_{12}$, задаваемой выражением (2.13):

$$d\vec{F}_{12} = \frac{I_2}{c} d\vec{l}_2 \times \vec{H}_{12} = \frac{I_2}{c} d\vec{l}_2 \times \frac{I_1}{c} \frac{d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{d\vec{l}_2 \times d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} . \quad (2.14)$$

Полученное выражение представляет *закон Ампера для взаимодействия элементов токов*. В принципе закон Ампера можно применять для анализа взаимодействия токов, *не привлекая понятие магнитного поле*.
Здесь прослеживается аналогия с электростатикой.

Выражение (2.14) заметно сложнее выражения (1.7") для закона Кулона, однако оно может быть упрощено. Вспомним, что элементы тока могут существовать только как части замкнутых контуров. То есть, должно подразумеваться, что дифференциал $d\vec{F}_{12}$ находится под знаками интегралов по контуру L_1 и по контуру L_2, то есть речь идет о силе взаимодействия контуров. В подынтегральном выражении можно провести следующие преобразования:

$$\oint\limits_{L_1}\oint\limits_{L_2} d\vec{F}_{12} = \oint\limits_{L_1}\oint\limits_{L_2} \frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{d\vec{l}_2 \times d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} =$$

$$= \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint\limits_{L_1}\oint\limits_{L_2} \left[\frac{d\vec{l}_1 (d\vec{l}_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} - \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \right] =$$

$$= -\frac{I_1 I_2}{c^2} \oint\limits_{L_1}\oint\limits_{L_2} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} . \quad (2.15)$$

После применения формулы для двойного векторного произведения $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(A \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ первое слагаемое опущено, так как интеграл от него по контуру L_2 равен нулю:

$$\oint\limits_{L_2} \frac{d\vec{l}_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \equiv \oint\limits_{L_2} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \cdot d\vec{r}_2 = \oint\limits_{L_2} -d\frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \equiv 0 .$$

Здесь учтено, что $d\vec{l}_2 \equiv d\vec{r}_2$, а также

$$d\frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{2i}} \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} dx_{2i} \equiv \vec{\nabla}_{\vec{r}_2} \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} d\vec{r}_2 = -\frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} d\vec{r}_2 .$$

Очевидно, что интеграл по замкнутому контуру от дифференциала скалярной функции равен нулю.

Таким образом, подынтегральное выражение (2.15)

$$d\vec{F}_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

ткаже, как и (2.14), является законом Ампера для взаимодействия элементов токов. Легко видеть, что для взаимодействия токов выполняется третий закон Ньютона $d\vec{F}_{12} = -d\vec{F}_{21}$. Сила зависит от угла θ, определяющего взаимную ориентацию токов, так как $d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 = dl_1 dl_2 \mathrm{Cos}\theta$. Одинаково направленные токи притягиваются, а направленные в противоположные стороны отталкиваются.

Обозначим вектор, соединяющий элементы токов, через $\vec{r}$, выражение для силы Ампера запишется окончательно в виде

$$d\vec{F}_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{\vec{r}(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)}{r^3} . \qquad (2.16)$$

Именно в таком виде (но, конечно, не в современных обозначениях) открыл его Ампер.

Интересно применить его к простому и важному случаю двух прямолинейных бесконечных параллельных токов. Пусть токи расположены на расстоянии d и текут в одинаковом направлении. Фиксируем dl_1 и проинтегрируем по dl_2. Сила, приложенная к dl_1 со стороны всего тока I_2, запишется в виде $dF_1 = -\frac{2I_1 I_2}{c^2 d} dl_1$. То есть сила притяжения, приходящаяся на единицу длины проводника, такова

$$\frac{dF}{dl} = \frac{2I_1 I_2}{c^2 d} . \qquad (2.17)$$

Это весьма важная формула, открытая Ампером экспериментально раньше более общей формулы (2.16), сыграла большую роль в развитии электродинамики.

Теперь мы знаем, что нужно искать в эксперименте. Мы исходили из уравнений поля и выражения для силы Лоренца, великим физикам прошлого, создавшим электродинамику, было труднее: они исследовали электромагнитные явления не зная ответов.

Остановимся вкратце на том, как это было [9,10].

В 1785 году *Шарль Огюстен Кулон* опубликовал свою работу по электричеству, в которой сформулировал основной закон электростатики. Есть свидетельства, что этот закон был известен раньше, в 1766 году химику и философу *Джозефу Пристли*. Сэр *Генри Кавендиш* в уже 1773 году установил экспериментально, что сила взаимодействия зарядов убывает с расстоянием по закону $\frac{1}{r^n}$, причем показатель степени $n = 2 \pm 0.02$. Но Кавендиш не считал нужным публиковать свои результаты. (Он же в 1798 году определил гравитационную постоянную и, тем самым, нашел массу Земли).

В 1780 году профессор анатомии *Луиджи Гальвани*, изучал действие электрических разрядов на мышцы лапок лягушек. Лягушка, зацепленная латунным крючком, висела на железной решетке. Случайно он обнаружил сокращение мышц без разрядов - под действием соединения двух металлов (прототип электрохимического *гальванического элемента*).

Через двадцать лет *Алессандро Вольта* после проведения ряда опытов, основанных на наблюдениях Луиджи Гальвани, изобрел "вольтов столб" - первую электрическую батарею. Впервые естествоиспытателям стала доступной работа с постоянным электрическим током. В 1801 году Вольта выступал с докладом о своем изобретении во Французском институте в присутствии Наполеона Бонапарта. Наполеон предложил учредить особую денежную премию за вклад в изучение электричества и гальванизма: "Я чувствую, что это путь великих открытий" - говорил он. Вскоре последовали открытия разложения воды электрическим током и открытие вольтовой дуги.

В 1820 году *Ханс Христиан Эрстед* на лекции открыл магнитное действие тока. Он хотел продемонстрировать студентам отсутствие действия тока на магнитную стрелку. В качестве проводника Эрстед использовал очень тонкую платиновую проволоку (чем увеличивал сопротивление и уменьшал ток), считая, что в случае существования эффекта наибольшим он должен был бы быть, когда проводник раскаляется из-за "столкновения" противоположных зарядов. Неожиданно обнаруженный эффект, был малым, но все же заметным.

Собственно исследование магнетизма началось гораздо раньше. Первое упоминание о применении магнитной стрелки для ориентации на местности и в мореплавании содержится в китайских источниках 124 года. В Европе способы применения и намагничивания магнитной стрелки были впервые описаны в 1195 году в работе естествоиспытателя *Александра Неккама*. В 1600 году вышел в свет трактат *Уильяма Гильберта*, физика, придворного врача королевы Елизаветы, в котором он пришел к выводу, что Земля является гигантским магнитом. Интересно отметить, что он выточил большой шар из куска магнитной руды и определил в различных точках поверхности направления, в которых ориентируется магнитная стрелка. Это было прекрасной моделью магнитного поля Земли. Однако до Эрстеда не было обнаружено никакой связи между электрическими и магнитными явлениями. Более того, электрические и магнитные явления не сразу стали отличать .друг от друга

Открытие Эрстеда, вызвало большой интерес, многие физики начали проводить количественные исследования. В том же 1820 году *Андрэ Мари Ампер*, а также *Жан Батист Био* и *Феликс Савар*, установили закон, определяющий магнитное поле по создающим его токам. В формулировке закона участвовал и *Пьер Симон Лаплас*. Этот закон и получил название закона Био-Савара-Лапласа.

Амперу принадлежит заслуга открытия взаимодействия двух проводников с током, он установил и обсуждавшуюся выше математическую форму этого закона (2.16).

Теперь, отталкиваясь от экспериментальных фактов, мы можем пройти путь от эксперимента к уравнениям поля (2.1а,б). Из закона Ампера (2.16) получить в обратном порядке соотношения (2.15) и

(2.14). При этом нужно ввести понятие магнитного поля (2.12) и силы Лоренца (2.13). То есть интерпретировать взаимодействие токов так: один ток создает поле (закон Био-Савара-Лапласа), другой подвергается со стороны поля действию силы (сила Лоренца). Ситуация, конечно, симметрична, выполняется третий закон Ньютона. Исходя и закона Био-Савара-Лапласа, записанного с помощью принципа суперпозиции в форме (2.9), легко можно получить уравнения для поля (2.1а,б). Для этого достаточно применить к (2.9) операции взятия дивергенции и ротора и учесть, как в электростатике, соотношение $\Delta\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}=-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$.

Но, как в электростатике, в принципе, нужды в таком посреднике взаимодействия, как поле, нет. В этом смысле понятие поля можно изгнать из статики с некоторым ущербом для удобства, но на пользу "строгости теории". Однако последнее слово в физике всегда за экспериментом! Не выходя за рамки статики, можно с помощью эксперимента сделать одно поразительное заключение, предвосхищающее дальнейшие достижения динамической теории электромагнитного поля.

Для понимания сути этого эксперимента нужно внимательно взглянуть на законы взаимодействия зарядов и токов

- закон Кулона (1.7") для точечных зарядов $\vec{F}=\frac{e_1e_2}{r^3}\vec{r}$

и закон Ампера (2.17) $\frac{dF}{dl}=\frac{2I_1I_2}{c^2d}$

для длинных параллельных проводников.

В законе Кулона впервые появляется новая физическая величина - *заряд*. Собственно теорию электрических и магнитных явлений можно определить как теорию поведения зарядов и порождаемого ими поля. Пока не выбрана *единица измерения заряда*, в законе Кулона можно говорить лишь о *пропорциональности силы зарядам* e_1 и e_2, именно пропорциональность обнаруживается в эксперименте.

То же касается закона Ампера для взаимодействия токов. Поэтому эти законы нужно записывать в виде: $\vec{F} = k_1 \frac{e_1 e_2}{r^3} \vec{r}$, $\frac{dF}{dl} = k_2 \frac{2 I_1 I_2}{d}$. Множитель "двойка" в законе Ампера выделен для удобства.

Определим теперь единицу измерения заряда. Простой и естественный выбор таков: назовем единичным заряд, действующий на другой такой же, на расстоянии равном единице с единичной силой[11]. Тогда в законе Кулона коэффициент k_1 равен единице.

Обратимся к закону Ампера. *После фиксации единицы заряда фиксирована и единица измерения тока в законе Ампера*, так как ток - это заряд, проходящий через сечение проводника в единицу времени, $I = \frac{dq}{dt}$. Так что единичным следует назвать ток, переносящий через сечение проводника единичный заряд в единицу времени. Это - *электростатическая единица измерения тока*. Но теперь, пропустим известные токи (известные заряды за известное время) через длинные параллельные проводники, возникающую силу взаимодействия, приходящуюся на единицу длины, можно измерить. Тем самым*, можно найти из эксперимента коэффициент пропорциональности в законе Ампера*.

Определим из закона Ампера размерность этого коэффициента в используемой нами электростатической системе единиц:

$$\frac{dF}{dl} = k_2 \frac{2 I_1 I_2}{d} \Rightarrow \frac{[F]}{L} = [k_2] \frac{\frac{Q}{T}\frac{Q}{T}}{L} \Rightarrow \frac{Q^2}{L^2} = [k_2] \frac{Q^2}{T^2} \Rightarrow [k_2] = \frac{1}{\left(\frac{L^2}{T^2}\right)} = \frac{1}{[V]^2}.$$

Здесь размерность силы взята из закона Кулона. Оказалось, что размерность коэффициента в законе Ампера равна размерности скорости в минус второй степени. Вместо константы k_2 можно ис-

---

[11] Единицы измерения расстояния, силы и т.п. мы знаем из механики. Можно работать, например, в системе СГС, для нас сейчас неважно в какой именно системе *механических* единиц мы работаем.

пользовать константу v ($k_2 = \frac{1}{v^2}$), имеющую размерность скорости и входящую в закон Ампера следующим образом: $\frac{dF}{dl} = \frac{1}{v^2}\frac{2I_1I_2}{d}$.

Константа k_2, а точнее соответствующая константа v имеет фундаментальное значение в теории электромагнетизма и может быть измерена в опыте с постоянными токами. Опыт по измерению константы v был проведен в 1855 году *Вильгельмом Эдуардом Вебером* и *Рудольфом Германом Кольраушем* в Геттингене, где директором обсерватории и профессором был *Карл Фридрих Гаусс*. В первых экспериментах удалось установить порядок константы, v оказалось порядка 10^{10} см/сек.

Вебер и Кольрауш не придали значения знаменательному совпадению значения этой константы с известной к тому времени из астрономических наблюдений скоростью света c=3$10^{10}$ см/сек. Они лишь указали, что скорость движения электрического заряда в цепях много меньше v. Можно считать, что к этому времени основные положения электро- и магнито*статики* были установлены, причем анализ законов Кулона и Ампера неожиданно ввел в теорию фундаментальную константу, оказавшуюся равной скорости света. Эту константу стали называть *электродинамической постоянной*.

Еще в 1834 году Чарльз Уитстон установил, что скорость распространения электрической искры имеет порядок 10^{10} см/сек (здесь уже вступает в игру динамика). *Майкл Фарадей* (кстати, изучивший физику совершенно самостоятельно) обращал внимание на то, что это может указывать на связь вещества с излучением. В 1957 году *Густав Роберт Кирхгоф* вывел телеграфное уравнение, которое показывает, что электрическое возмущение распространяется по проводу со скоростью равной электродинамической постоянной.

Раз уж мы перешли к обсуждению открытий в динамике, следует сказать, что Фарадей в 1831 году после многих неудачных попыток открыл индуцированные токи. Стало ясно, что не только электричество производит магнетизм (открытие Эрстеда), но и магнетизм может порождать электричество. Любопытно, что явление *элек-*

тромагнитной индукции наблюдали еще в 1822 году Ампер и *Огюст де ля Рив*, но не придали ему значения.

Наконец, в 1864 году Джеймс Клерк Максвелл опубликовал исследование "Динамическая теория электромагнитного поля", в котором в окончательном виде сформулировал основные положения *электродинамики*.

Вернемся, однако, к определению единиц измерения заряда и тока. Очевидно, что при определении единиц измерения в теории электромагнетизма можно оттолкнутся от закона Ампера. Назовем единичным ток, который при протекании по бесконечному тонкому проводнику действует на единицу длины такого же тока, находящегося на единичном расстоянии, с единичной силой. Тогда в законе Ампера коэффициент пропорциональности будет равен единице, зато появится коэффициент в законе Кулона (это своеобразный "тришкин кафтан"). Так определенная единица тока называется *электродинамической единицей*. Через нее, конечно, теперь определяется единица заряда. Назовем единичным заряд, переносимый через сечение проводника в единицу времени единичным током. В системе СИ за основу для физических величин теории электромагнитных явлений приняты электродинамические единицы. Только в определении тока сила на единицу длины проводника выбрана не единичная, а 210^{-7} ньютон. Эта единица тока названа *ампером*, а соответствующая единица заряда *кулоном*.

Теперь, имея общее решение, магнитостатических уравнений Максвелла, полезно исследовать, как в электростатике, предельный случай этого решения - магнитное поле ограниченной системы токов на далеких расстояниях.

2.2. Поле магнитного диполя

Решение уравнения (2.7) для вектор-потенциала имеет вид (2.8) $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dv'$. Применим асимптотическое разложение функции Грина на далеких расстояниях (1.23), ограничившись первыми двумя слагаемыми:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int \vec{j}(\vec{r}\,')\left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\vec{r}\,'}{r^3}\right)dv' = \frac{1}{cr}\int \vec{j}(\vec{r}\,')dv' + \frac{1}{cr^3}\int (\vec{r}\vec{r}\,')\vec{j}(\vec{r}\,')dv' \qquad (2.18)$$

Покажем, что первое слагаемое равно нулю:

$$\int \vec{j}(\vec{r})dv = \vec{i}\int j_x dxdydz + \ldots \equiv \vec{i}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} j_x dx\right)dydz + \ldots =$$

$$= \vec{i}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(xj_x(\infty) - xj_x(-\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{\partial j_x}{\partial x}dx\right)dydz + \ldots$$

$$= \vec{i}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}\right)dx\right)dydz + \ldots$$

$$= \vec{i}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{div}\vec{j}\,dxdydz + \vec{j}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\,\mathrm{div}\vec{j}\,dxdydz + \vec{k}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} z\,\mathrm{div}\vec{j}\,dxdydz =$$

$$= \int \vec{r}\,\mathrm{div}\vec{j}\,dv = 0$$

В первом равенстве для дальнейших преобразований оставлена только x-компонента плотности тока, y- и z- компоненты заменены многоточием: они преобразуются аналогично. Затем применено интегрирование по частям по переменной x. $j_x(\infty) = j_x(-\infty) = 0$, так как тока на бесконечности нет. Далее добавлены слагаемые $\frac{\partial j_y}{\partial y}$ и $\frac{\partial j_z}{\partial z}$, так как интеграл от них по y и по z соответственно равен нулю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{\partial j_y}{\partial y}dy = x(j_y(\infty) - j_y(-\infty)) = 0\,.$$

Затем восстановлены в явном виде слагаемые представленные ранее многоточием[12]. Наконец, в последнем равенство, в соответствии с (2.2), $\mathrm{div}\vec{j} = 0$.

В отличие от электростатики, в разложении вектор-потенциала ведущим является вклад дипольного члена, соответствующего сла-

[12] К сожалению, обозначения *орта* $\vec{j}$, стоящего перед интегралом во втором слагаемом, и плотности тока совпадают. Как говорится, "мыслей много, а букв не хватает". Надеемся, это не смутит читателя.

гаемому $\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^3}$ в асимптотическом разложении функции Грина. Наверное, это не удивительно, ведь магнитных зарядов в природе нет (см. уравнение Максвелла[13] (1.1в)).

Приступим к анализу второго слагаемого в разложении вектор-потенциала - $\frac{1}{cr^3}\int(\vec{r}\vec{r}')\vec{j}(\vec{r}')dv'$. Идея введения мультипольных моментов в электростатике заключалась в том, чтобы вынести из под знака интеграла компоненты радиус-вектора точки наблюдения $\vec{r}$. Запишем структуру интеграла компонентах:

$$\int(\vec{r}\vec{r}')\vec{j}(\vec{r}')dv' \equiv \int x_k x'_k\, j_i(\vec{r}')dv' = x_k \int x'_k\, j_i(\vec{r}')dv'\ .$$

Результат не слишком изящный: интеграл является тензором второго ранга, он свернут по одному из индексов с компонентами вектора $\vec{r}$. Можно найти более удобную форму представления. Заметим, что выражение $(\vec{r}\vec{r}')\vec{j}(\vec{r}')$ является частью тождества, соответствующего известной формуле для двойного векторного произведения: $\vec{r}\times(\vec{r}'\times\vec{j}) = \vec{r}'(\vec{r}\vec{j}) - \vec{j}(\vec{r}\vec{r}')$. Проинтегрируем по пространству левую и правую части этого равенства

$$\int\vec{r}\times(\vec{r}'\times\vec{j})dv' = \int\vec{r}'(\vec{r}\vec{j})dv' + (-\int\vec{j}(\vec{r}\vec{r}')dv')\ .$$

В левой части равенства множитель $\vec{r}$ выносится за знак интеграла. В правой части, как мы увидим ниже, первое слагаемое оказывается равным второму слагаемому (взятому в скобки вместе со знаком "минус"):

$$\int\vec{r}'(\vec{r}\vec{j})dv' = -\int\vec{j}(\vec{r}\vec{r}')dv' \qquad (2.19)$$

Значит, интересующий нас интеграл можно представить следующим образом:

---

[13] Точнее сказать, до сих пор магнитный монополь не обнаружен, несмотря на упорные поиски. Существование магнитных зарядов вопрос к эксперименту, но не исключено, что когда-нибудь в теории будет объяснено, почему магнитный монополь не может существовать, пока вопрос остается открытым.

$$\int \vec{j}(\vec{r}\vec{r}\,')dv' = -\frac{1}{2}\vec{r}\times\int(\vec{r}\,'\times\vec{j})dv' \,. \qquad (2.20)$$

Тогда выражение для вектор-потенциала принимает вид:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{cr^3}\int(\vec{r}\vec{r}\,')\vec{j}(\vec{r}\,')dv' = -\frac{1}{cr^3}\frac{1}{2}\vec{r}\times\int(\vec{r}\,'\times\vec{j})dv' = \frac{\int(\vec{r}\,'\times\vec{j})dv'}{2c}\times\frac{\vec{r}}{r^3} \,.$$

Введем обозначение

$$\vec{M} = \frac{\int(\vec{r}\,'\times\vec{j})dv'}{2c} \qquad (2.21)$$

для *магнитного дипольного момента* системы токов. Тогда окончательно

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{M}\times\vec{r}}{r^3} \,. \qquad (2.22)$$

Осталось доказать равенство (2.19). Поскольку это доказательство является чисто техническим моментом, отделим его от остального текста.

Доказательство равенства (2.19).

$$\int \vec{j}(\vec{r}\vec{r}\,')dv' \equiv \int j_i x_k x'_k dv' = x_k \int x'_k\, j_i dv' = x_k \int x'_k \frac{\partial x'_i\, j_m}{\partial x'_m} dv' \,. \qquad (2.23)$$

Здесь использовано тождество

$$\frac{\partial x'_i\, j_m}{\partial x'_m} = \delta_{im} j_m + x'_i \frac{dj_m}{\partial x_m} = j_i + x'_i \,\mathrm{div}\vec{j} = j_i \,.$$

Распишем теперь в (2.23) в явном виде суммирование по m:

$$x_k \int x'_k \frac{\partial x'_i\, j_m}{\partial x'_m} dv' =$$

$$= x_k \Bigg[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x'_k \frac{\partial x'_i\, j_1}{\partial x'_1} dx'_1\, dx'_2\, dx'_3 + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x'_k \frac{\partial x'_i\, j_2}{\partial x'_2} dx'_1\, dx'_2\, dx'_3 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x'_k \frac{\partial x'_i\, j_1}{\partial x'_1} dx'_1\, dx'_2\, dx'_3 \Bigg] =$$

$$= x_k\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x'_k\,x'_i\,j_1(\infty)-x'_k\,x'_i\,j_1(-\infty)-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x'_i\,j_1\frac{\partial x'_k}{\partial x'_1}dx'_1\right)dx'_2\,dx'_3+\dots\right]=$$

$$= x_k\left[-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x'_i\,j_1\frac{\partial x'_k}{\partial x'_1}dx'_1\,dx'_2\,dx'_3-\dots\right]= x_k\left[-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x'_i\,j_1\delta_{1k}dx'_1\,dx'_2\,dx'_3-\dots\right]=$$

$$= x_k\left[-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x'_i\,j_1\delta_{1k}dx'_1\,dx'_2\,dx'_3-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x'_i\,j_2\delta_{2k}dx'_1\,dx'_2\,dx'_3+\right.$$

$$\left.-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x'_i\,j_3\delta_{3k}dx'_1\,dx'_2\,dx'_3\right]x_k=$$

$$= -x_k\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x'_i\,j_m\delta_{mk}dx'_1\,dx'_2\,dx'_3 = -x_k\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x'_i\,j_k dx'_1\,dx'_2\,dx'_3=$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x'_i\,x_k j_k dx'_1\,dx'_2\,dx'_3 \equiv -\int \vec r\,'(\vec r\vec j)dv\,.$$

В первом слагаемом интеграл по x_1 взят по частям и учтено, что $\vec j(\infty)=0$, во втором и третьем слагаемых, замененных многоточием, проводятся аналогичные действия по x_2 и x_3. Затем по правилу суммирования Эйнштейна сумма трех слагаемых сворачивается по индексу m. Остальные действия не представляют затруднений. Доказательство (2.19) закончено.

Магнитный дипольный момент (2.21) (часто говорят просто магнитный момент) - это характеристика ограниченного распределения токов, определяющая поле на расстояниях много больших характерных размеров системы. Конечно, такая ситуация встречается очень часто. Для антенны метр длиной расстояние 50 метров уже является далеким, для ядра размером порядка 10^{-13} см атомные расстояния 10^{-8} см очень велики.

Магнитный дипольный момент - векторная величина, также как электрический дипольный момент (1.24). В отличие от электрического дипольного момента, магнитный момент $\vec M=\dfrac{\int(\vec r\times\vec j)dv}{2c}$ остается неизменным для любой системы токов при сдвиге системы координат:

$$\vec{r} \Rightarrow \vec{r}+\vec{a}, \quad \vec{M}_{нов} = \frac{\int((\vec{r}+\vec{a})\times\vec{j})dv}{2c} = \vec{M} + \frac{1}{2c}\vec{a}\times\int\vec{j}dv = \vec{M}\ .$$

Последний интеграл, как мы знаем (см. обсуждение (2.18)), равен нулю.

Поле магнитного диполя вычисляется взятием ротора от (2.22)

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\frac{\vec{M}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{3\vec{n}(\vec{n}\vec{M})-\vec{M}}{r^3}\ , \qquad (2.24)$$

где $\vec{n}=\frac{\vec{r}}{r}$ - единичный вектор, направленный на точку наблюдения. Интересно, что по форме это поле точно совпадает с электрическим полем электрического диполя (1.25), надо только заменить $\vec{d}$ на $\vec{M}$.

При рассмотрении электростатического поля системы зарядов на далеких расстояниях, система может быть эффективно заменена точечным диполем с соответствующим дипольным моментом. То же с магнитным полем системы токов. Вопрос в том. как представлять себе точечный магнитный диполь.

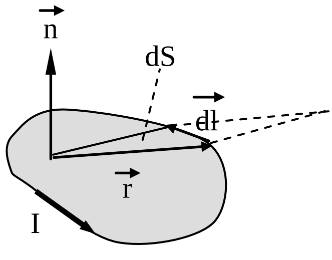

Рис.7. Плоский замкнутый контур с током.

Вычислим магнитный момент плоского замкнутого контура с током (рис.7).

$$\vec{M} = \frac{\int(\vec{r}\times\vec{j})dv}{2c} = \frac{I}{2c}\oint\vec{r}\times d\vec{l} = $$

$$= \frac{I}{c}\oint\frac{\vec{r}\times d\vec{l}}{2} = \frac{I}{c}\oint\vec{n}dS = \frac{IS}{c}\vec{n}\ .$$

Здесь выполнен переход от объемного интеграла к контурному. Учтено, что $\frac{\vec{r}\times d\vec{l}}{2}$ - вектор, равный по величине половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}$ и $d\vec{l}$, то есть площади соответствующего треугольника. Значит, модуль этого вектора - это дифференциал площади, а направлен вектор по нормали к плоскости контура. Таким образом, магнитный момент плоского замкнутого контура с током пропорционален току и площади, охватываемой контуром, а направлен перпендикулярно поверхности по правилу правого винта. Для получения точечного магнитного диполя следует устремлять S к нулю, одновременно увеличивая I, так, чтобы произведение $I \cdot S$ оставалось постоянным.

Вычислим также магнитный момент системы движущихся точечных зарядов e_i. Их движение задается зависимостью $\vec{r}_i(t)$. Точечный заряд e_i, движущийся по закону, $\vec{r}_i(t)$ создает ток $\vec{j}_i(\vec{r}) = \rho_i \vec{v}_i = e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)\vec{v}_i$, где $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$. Плотность тока системы зарядов - это сумма плотностей токов всех зарядов $\vec{j}(\vec{r}) = \sum \rho_i \vec{v}_i = \sum e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)\vec{v}_i$. Подставим это выражение в формулу (2.21) для магнитного момента.

$$\vec{M} = \frac{\int (\vec{r} \times \vec{j})dv}{2c} = \frac{\int (\vec{r} \times \sum e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)\vec{v}_i)dv}{2c} = \frac{1}{2c}\sum e_i \int (\vec{r} \times \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)\vec{v}_i)dv =$$
$$= \frac{1}{2c}\sum e_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i .$$

В случае, когда заряд частицы пропорционален массе $\frac{e_i}{m_i} = \frac{e}{m} = \text{const}$, магнитный момент выражается через механический момент системы (момент импульса) $\vec{L}$. Действительно,

$$\vec{M} = \frac{1}{2c}\sum e_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \frac{1}{2c}\sum \frac{e_i}{m_i} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \frac{1}{2c}\frac{e}{m}\sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \frac{e}{2mc}\vec{L} .$$

Коэффициент пропорциональности $\frac{e}{2mc}$ называется *гиромагнитным отношением*.

Остановимся теперь на поведении системы токов во внешнем магнитном поле.

На элемент объемного тока $\vec{j}dv$ действует, согласно (1.3'), сила Лоренца $d\vec{F} = \frac{1}{c}\vec{j} \times \vec{H}dv$ Полная сила, действующая на распределение токов, дается интегралом $\vec{F} = \frac{1}{c}\int \vec{j} \times \vec{H}dv$. Если магнитное поле является *постоянным*, то есть, не зависящим от точки пространства, то эта сила рана нулю $\vec{F} = \frac{1}{c}\int \vec{j} \times \vec{H} dv = \frac{1}{c}(\int \vec{j} dv) \times \vec{H} = 0$. Момент силы не равен нулю и в постоянном поле. Для постоянного магнитного поля момент силы, действующий на ограниченную систему токов, определяется магнитным моментом системы[14]. Получим выражение для момента силы[15]:

$$\vec{N} = \int \vec{r}' \times d\vec{F} dv' = \frac{1}{c}\int \vec{r}' \times (\vec{j} \times \vec{H}) dv' = \frac{1}{c}\int \vec{j}(\vec{r}'\vec{H}) dv' - \frac{1}{c}\int \vec{H}(\vec{r}'\vec{j}) dv'. \qquad (2.25)$$

Здесь второе слагаемое равно нулю. Действительно, применим тождество

$$\mathrm{div}(r'^2 \vec{j}) \equiv \frac{\partial r'^2 j_k}{\partial x_k} = \frac{\partial x'_m x'_m}{\partial x_k} j_k + x'_m x'_m \frac{\partial j_k}{\partial x_k} =$$

$$= \delta_{mk} x'_m j_k + x'_m \delta_{mk} j_k + r'^2 \mathrm{div}\vec{j} = 2x'_k j_k + 0 \equiv 2\vec{r}'\vec{j}$$

к подынтегральному выражению:

$$\frac{1}{c}\int \vec{H}(\vec{r}'\vec{j}) dv' = \frac{1}{c}\vec{H}\int (\vec{r}'\vec{j}) dv' = \frac{1}{c}\vec{H}\frac{1}{2}\int \mathrm{div}(r'^2 \vec{j}) dv' = \frac{1}{2c}\vec{H}\oint r'^2 \vec{j} d\vec{s} = 0.$$

Благодаря переходу к дивергенции интеграл по пространству по теореме Гаусса преобразуется в поверхностный интеграл *по бесконечно удаленной поверхности*, а на бесконечности токов нет.

---

[14] То же можно сказать и о медленно (плавно) меняющемся поле, малые изменения поля на расстояниях, сравнимых с характерными размерами системы, дают лишь поправку к ответу для постоянного поля.

[15] Обратим внимание читателя на то, что в качестве переменной интегрирования обычно используется вектор $\vec{r}'$, указывающий на объем dv', но нередко, там, где это возможно и удобно, штрих опускается, хотя обозначение $\vec{r}$ зарезервировано за радиус-вектором точки наблюдения. В данном случае штрих оставлен только для того, чтобы установить подобие первого слагаемого с левой частью соотношения (2.20).

Первое слагаемое в (2.25) по структуре идентично выражению в левой части равенства (2.20). Применим (2.20), заменив $\vec{r}$ на $\vec{H}$, для дальнейшего упрощения (2.25):

$$\vec{N} == \frac{1}{c}\int \vec{j}(\vec{r}'\vec{H})dv' = -\frac{1}{2c}\vec{H}\times\int(\vec{r}'\times\vec{j})dv' = \frac{\int(\vec{r}'\times\vec{j})dv'}{2c}\times\vec{H} = \vec{M}\times\vec{H}\,. \quad (2.26)$$

И опять мы видим аналогию с электростатикой (см. (1.27)). Магнитный диполь стремиться ориентироваться по полю.

Рекомендуемая литература

1. Мангазеев Б.В., Афанасьев А.Д.. Векторный анализ для физиков. - Иркутск, изд-во ИГУ, 1991.
2. Джексон Дж. Классическая электродинамика. - М., 1965.
3. Тамм И.Е. Основы теории электричества. - М., 1976.
4. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. - М., 1985.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. - М., 1973.
6. Алексеев А.И. Сборник задач по классической электродинамике. - М., 1977.
7. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. - М., 1970.
8. Арфкен Г. Математические методы в физике. - М., 1970.
9. Дорфман История физики
10. Фолта Я., Новы Л. История естествознания в датах. - М., 1987.