

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Иркутский государственный университет»

Физический факультет

Растёгин А. Э.

ЗАКОН ОМА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие

Иркутск — 2023

УДК 537.311.2(075.8)

ББК 22.33я73

Р-24

*Печатается по решению учебно-методической комиссии
физического факультета ИГУ*

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, проф. *Н. Т. Афанасьев*

д-р физ.-мат. наук *Ю. А. Марков*

Закон Ома в примерах и задачах. Учебно-методическое пособие. ИГУ,
Иркутск, 2023

Рассмотрены примеры решения задач, в которых нужно использовать ту или иную формулировку закона Ома, иногда вместе с принципом суперпозиции и соображениями симметрии. В конце каждого параграфа даны задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов 2-го курса физического факультета ИГУ, обучающихся по направлениям подготовки «Физика» и «Радиофизика».

Оглавление

Предисловие	4
§ 1. Применения закона Ома и правил Кирхгофа	6
§ 2. Метод контурных токов	16
§ 3. Преобразования при наличии симметрии	25
§ 4. Преобразования типа «звезда – треугольник»	34
§ 5. Закон Ома в дифференциальной форме	45
§ 6. Двумерные задачи и комплексный потенциал	55
§ 7. Разделение переменных в двумерных задачах	67
Заключение	81
Список использованной и рекомендуемой литературы	82

Предисловие

Задачи на расчет электрических цепей традиционно предлагаются студентам инженерно-физических специальностей в рамках изучения курса «Электричество и магнетизм». Помимо иллюстрации относящегося к этому разделу теоретического материала, такие примеры могут быть интересны с точки зрения повседневной практики. Преобразования заданной схемы в эквивалентные ей формы являются простым примером моделирования с заменой одних блоков другими, выполняющими те же функции в рамках принятой модели. Электрические цепи постоянного тока исследуются с применением соответствующей формулировки закона Ома и его следствий. Прохождение тока через электропроводящую среду приводит к выделению тепла, что описывается законом Джоуля – Ленца.

В данном пособии рассматриваются примеры и задачи, связанные с прохождением постоянного тока через разветвленные электрические цепи или объемные изотропные проводящие среды. Теоретическую основу анализа составляют закон Ома для участка цепи, для полной электрической цепи, правила Кирхгофа, а также закон Ома в дифференциальной форме. Используемый при вычислениях математический аппарат ограничивается теми знаниями, которыми студенты физического факультета располагают на момент изучения теории электричества и магнетизма в рамках общего курса физики. Поэтому из рассмотрения исключены задачи, для решения которых нужно применять интегральные преобразования, специальные функции или приближенные методы математической физики.

В последних двух параграфах обсуждаются некоторые применения конформных отображений и метода разделения переменных для решения задач на плоскости. Знакомство с этими разделами является необходимым с точки зрения инженерно-физических приложений уравнения

Лапласа, и ими должен овладеть всякий студент, изучающий курс физики соответствующего уровня. В основе метода разделения переменных лежит идея о разложении искомой величины по соответствующему задаче набору функций. Поскольку многие приближенные методы также используют разложения указанного типа, изучение традиционного для физиков математического аппарата, важное и само по себе, способствует формированию осознанного подхода к численному моделированию. Успех в этом деле невозможен без качественного понимания физической стороны явлений.

В пособии не рассматриваются сложные многоэлементные цепи, анализ которых зависит в основном от упрощения и должной систематизации громоздких вычислений. Напротив, включено достаточное количество физических примеров, в решении которых центральную роль играют соображения симметрии, аналогия и принцип суперпозиции. Даже будучи идеализированными, эти примеры дают возможность сконцентрироваться на физической сути дела и, как можно надеяться, «прочувствовать» связь математических выражений с силовыми линиями поля или трубками тока. В конечном счете именно в такой наглядной форме электромагнитные явления представлял и описывал Фарадей, основоположник учения об электромагнитном поле. Уравнения Максвелла выразили эти представления на математическом языке.

Как уже было сказано выше, изложение становится более формальным лишь в последних двух параграфах, где используются некоторые сведения из теории функций комплексного переменного и обсуждается метод разделения переменных. Но и в этих разделах сделана попытка продемонстрировать физический смысл итоговых формул, включая анализ предельных случаев или распределение токов на больших расстояниях от источника. Если картину силовых линий или трубок тока можно предсказать на основании простых физических соображений, то мы располагаем методом верификации проведенных расчетов. Эффективное изучение той или иной отрасли физико-математических наук характеризуется не только способностью решать задачи, но и умением проверять результаты вычислений, находить и исправлять ошибки. Рассмотренные ниже примеры содержат обсуждение указанных вопросов в подходящих для этого случаях.

§ 1. Применения закона Ома и правил Кирхгофа

Электрический ток представляет собой упорядоченное перемещение носителей заряда. В электросетях носителями заряда являются свободные электроны, движимые внешним электрическим полем. Ниже рассматривается простейший случай постоянного тока. Для самых простых неразветвленных цепей токи и напряжения можно рассчитать с помощью закона Ома. Если к однородному участку цепи с сопротивлением R приложено напряжение U , то сила протекающего по участку цепи тока выражается формулой

$$I = \frac{U}{R}. \quad (1.1)$$

Если участок цепи содержит также ЭДС \mathcal{E} , то выражение для силы тока записывается в виде

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}}{R},$$

причем все значения подставляются с учетом их знаков. Через $\varphi_1 - \varphi_2$ обозначается разность потенциалов начальной и конечной точек этого участка. Из величин, входящих в закон Ома, только общее сопротивление участка R всегда положительно. Напомним также закон Джоуля – Ленца, согласно которому тепловыделение в единицу времени выражается формулой

$$W = RI^2, \quad (1.2)$$

когда ток величиной I протекает через элемент с сопротивлением R .

Общее сопротивление R_{ser} цепи, состоящей из n последовательно соединенных проводников, равно сумме сопротивлений отдельных проводников, а именно

$$R_{ser} = R_1 + \dots + R_n = \sum_{k=1}^n R_k. \quad (1.3)$$

При параллельном соединении n резисторов суммируются величины, обратные сопротивлениям, поэтому общее сопротивление удовлетворяет

соотношению

$$\frac{1}{R_{par}} = \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}. \quad (1.4)$$

В простейших случаях от исходной электрической схемы удается перейти к более простой эквивалентной схеме, токи и сопротивления в которой легко рассчитать. Если же формул (1.3) и (1.4) недостаточно, то соотношения для токов и напряжений устанавливаются с помощью известных правил, впервые сформулированных Кирхгофом и носящих ныне его имя.

Первое правило Кирхгофа выражает закон сохранения заряда: алгебраическая сумма токов, сходящихся в точке разветвления проводников, или узле, равна нулю, т. е.

$$\sum_k I_k = 0.$$

Втекающие в узел токи обычно принимаются положительными, а вытекающие из него – отрицательными. *Второе правило Кирхгофа* является следствием закона Ома для простейшей замкнутой цепи. В любом замкнутом контуре, выделенном в сложной цепи, алгебраическая сумма ЭДС, действующих в этом контуре, равна алгебраической сумме падений напряжений на отдельных участках контура, а именно

$$\sum_k R_k I_k = \sum_q \mathcal{E}_q.$$

При этом в качестве положительной можно выбрать любую ЭДС контура. Для остальных знаки ставятся в зависимости от их полярности по отношению к выбранной опорной ЭДС. Если какой-то источник включен последовательно с опорной ЭДС, то ЭДС источника тоже положительна, а если навстречу опорной, то отрицательна. Знаки падений напряжений определяются направлениями соответствующих токов. Положительным будет тот ток, который течет в том же направлении, что и ток, генерируемый опорной ЭДС. Противоположное направление тока имеет отрицательный знак.

В принципе, источники тока в электрических цепях могут быть объединены в батарею разными способами. Наиболее употребительными на практике являются последовательное и параллельное соединения. При последовательном соединении источников ЭДС образовавшейся батареи равна алгебраической сумме ЭДС источников, а ее внутреннее

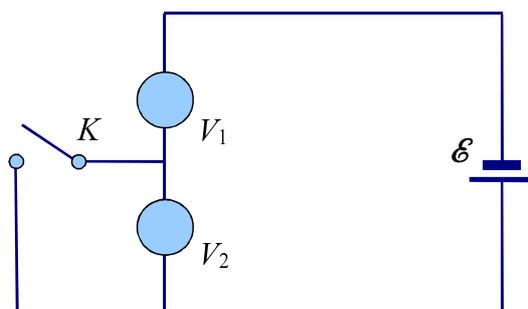


Рис. 1.1. К примеру 1.1

сопротивление – сумме внутренних сопротивлений источников. Как уже было отмечено выше, знак какой-либо ЭДС определяется сопоставлением с опорной ЭДС. При параллельном соединении принято использовать одинаковые источники, включая их в батарею с одной и той же полярностью. В этом случае ЭДС батареи равна ЭДС любого из n составляющих ее источников, тогда как внутреннее сопротивление батареи в n раз меньше внутреннего сопротивления составного элемента. Как правило, параллельные соединения различных источников не применяются.

Далее в этом параграфе рассмотрены примеры непосредственного использования закона Ома для участка цепи и для полной цепи, а также правил Кирхгофа. Для удобства читателя вычисления представлены с достаточно высокой степенью детализации.

Пример 1.1. При замкнутом ключе K вольтметр V_1 показывает $0,8\mathcal{E}$, где \mathcal{E} – ЭДС батареи (рис. 1.1). Что покажут вольтметры V_1 и V_2 при разомкнутом ключе, если их сопротивления равны?

Решение. Сопротивление батареи обозначим через r , сопротивление вольтметра через R . Если ключ K замкнут, то ток через вольтметр V_2 отсутствует и разность потенциалов на нем равна нулю. Поэтому сила тока записывается в виде

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R}. \quad (1.5)$$

По закону Ома для участка цепи $RI = 0,8\mathcal{E}$, что вместе с (1.5) дает $rI = 0,2\mathcal{E}$, так что $R = 4r$. При разомкнутом ключе для силы тока справедливо выражение

$$J = \frac{\mathcal{E}}{r + 2R},$$

а показание каждого из вольтметров

$$RJ = \frac{R\mathcal{E}}{r + 2R} = \frac{4r\mathcal{E}}{r + 8r} = \frac{4\mathcal{E}}{9}.$$

Пример 1.2. Присоединение к вольтметру некоторого добавочного сопротивления увеличивает предел измерений напряжения в m раз. Другое добавочное сопротивление увеличивает предел измерений в n раз. Во сколько раз увеличится предельное измеряемое вольтметром напряжение, если последовательно с вольтметром включить эти два сопротивления, соединенные между собой параллельно?

Решение. Сначала ответим на такой вопрос. Пусть данным вольтметром можно измерить любое напряжение вплоть до максимального значения U_0 . Какую наибольшую разность потенциалов можно измерить этим вольтметром, если присоединить к нему добавочное сопротивление R_1 ? Пусть внутреннее сопротивление вольтметра равно r , тогда при показании вольтметра U сила тока имеет вид

$$I = \frac{U}{r}.$$

Если последовательно с вольтметром включить сопротивление R_1 , то при такой силе тока падение напряжения на добавочном сопротивлении равно $R_1 I$, а на всем участке «вольтметр + сопротивление» оно выражается формулой

$$rI + R_1 I = \frac{r + R_1}{r} U. \quad (1.6)$$

Зная величины r и R_1 , по показаниям U вычисляется падение напряжения (1.6). Поскольку наибольшее доступное измерению напряжение получается при показании U_0 , его величина записывается в виде

$$U_1 = \frac{r + R_1}{r} U_0.$$

При отношении напряжений $U_1/U_0 = m$ находим $R_1 = (m - 1)r$. Аналогично для второго сопротивления получаем $R_2 = (n - 1)r$. Параллельное соединение R_1 и R_2 имеет сопротивление

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(m - 1)(n - 1)}{m + n - 2} r.$$

В результате предельно измеряемое вольтметром напряжение увеличится в k раз, причем

$$k = \frac{r + R}{r} = \frac{mn - 1}{m + n - 2}.$$

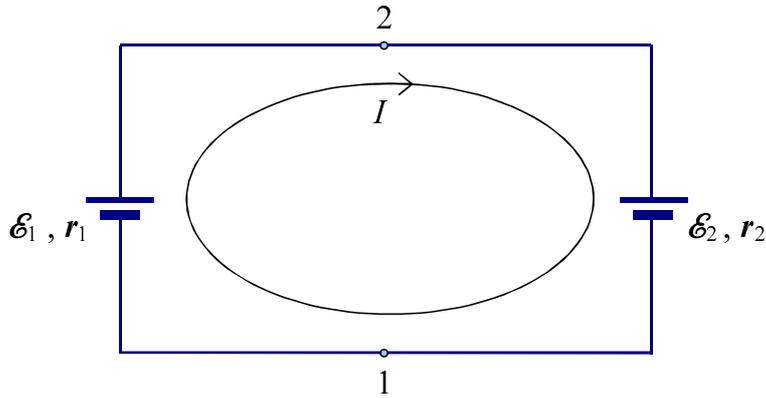


Рис. 1.2. К примеру 1.3

Как изменится результат, если два добавочных сопротивления соединены последовательно?

Пример 1.3. Чему равна разность потенциалов между точками 1 и 2 в схеме на рис. 1.2? ЭДС батарей $\mathcal{E}_1 = 12$ В и $\mathcal{E}_2 = 8$ В, внутренние сопротивления $r_1 = 0,5$ Ом и $r_2 = 1,5$ Ом соответственно. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

Решение. Условимся считать положительным направление обхода по часовой стрелке. Полная ЭДС цепи равна $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$, а сила тока

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2}.$$

Закон Ома для левого участка цепи между точками 1 и 2 записывается в виде

$$\varphi_1 - \varphi_2 = r_1 I - \mathcal{E}_1 = -\frac{r_2 \mathcal{E}_1 + r_1 \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2}. \quad (1.7)$$

Подстановка численных данных дает $\varphi_1 - \varphi_2 = -11$ В. Знак минус указывает на то, что потенциал точки 1 меньше потенциала точки 2. Что получается, если применить закон Ома к правому участку цепи?

Пример 1.4. Батарея, замкнутая на сопротивление 10 Ом, дает ток 3 А; будучи замкнутой на 20 Ом, она дает 1,6 А. Найти ЭДС и внутреннее сопротивление батареи.

Решение. По закону Ома для полной цепи получаем для двух случаев соотношения:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + r}, \quad (1.8)$$

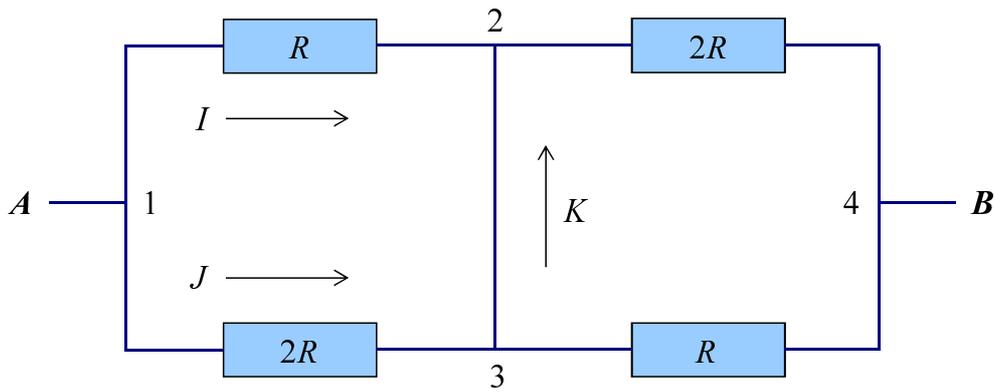


Рис. 1.3. К примеру 1.5

откуда

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2 + r}{R_1 + r}.$$

Элементарными преобразованиями получается внутреннее сопротивление

$$r = \frac{R_2 I_2 - R_1 I_1}{I_1 - I_2}.$$

Теперь любое из двух уравнений (1.8) приводит к выражению для ЭДС

$$\mathcal{E} = \frac{(R_2 - R_1) I_1 I_2}{I_1 - I_2}.$$

Подстановка численных значений дает $r = 1,43$ Ом и $\mathcal{E} = 34,3$ В.

Пример 1.5. Найти токи в схеме на рис. 1.3, если между точками A и B поддерживается напряжение U .

Решение. *Первый способ* заключается в непосредственном использовании правил Кирхгофа. Пометим узлы цепи согласно рис. 1.3. Силу тока на участке 12 обозначим через I , на участке 13 через J и на участке 32 через K . По первому правилу Кирхгофа токи на участках 24 и 34 равны $I + K$ и $J - K$ соответственно. Так как падение напряжения на участке 12 равно RI и на участке 24 равно $2R(I + K)$, второе правило Кирхгофа дает

$$RI + 2R(I + K) = 3RI + 2RK = U. \quad (1.9)$$

Источники ЭДС в замкнутом контуре 123 отсутствуют, поэтому

$$RI - 2RJ = 0. \quad (1.10)$$

По тем же причинам для контура 243 имеем

$$2R(I + K) - R(J - K) = 2RI - RJ + 3RK = 0. \quad (1.11)$$

Получилась система трех линейных уравнений (1.9)–(1.11) с тремя неизвестными токами I , J , K . Это закономерно, так как правила Кирхгофа дают ту или иную систему линейных соотношений с токами и напряжениями. Далее находим $I = 2J$ из (1.10) и $J = 2I + 3K$ из (1.11), так что итого $J = -K$ и $I = -2K$. Подстановка последней формулы в (1.9) дает

$$-K = \frac{U}{4R} = J.$$

Знак минус означает, что фактически ток на участке 32 направлен от 2 к 3. Записываем также $I = 2J = U/(2R)$. Тем самым все искомые токи найдены.

Второй способ состоит в использовании того факта, что потенциалы точек 2 и 3 равны, так что их можно соединить в один узел. В результате получается эквивалентная схема из двух равных и последовательно расположенных сопротивлений. Каждое из них равно $2R/3$ как результат параллельного соединения R и $2R$, поскольку

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R}.$$

Общий ток через одно такое сопротивление записывается в виде

$$I + J = \frac{U/2}{2R/3} = \frac{3U}{4R}. \quad (1.12)$$

Поскольку токи I и J находятся в отношении $2 : 1$, формула (1.12) дает окончательно $I = 2J = U/(2R)$. Зная токи I и J , находим ток между узлами 2 и 3. В рассмотренном несложном примере использование эквивалентной схемы позволило сократить выкладки. В случае анализа сложной цепи следует упростить ее или выделить участки, расчеты которых можно произвести независимо.

Пример 1.6. Найти сопротивление между точками A и B в схеме, показанной на рис. 1.4.

Решение. Пронумеруем узлы схемы так, как показано на рис. 1.4. Силу тока на участке 12 обозначим через I , на участке 13 через J и на участке 32 через K . В общем случае нельзя заранее предвидеть, каким окажется направление тока по сопротивлению на промежуточном

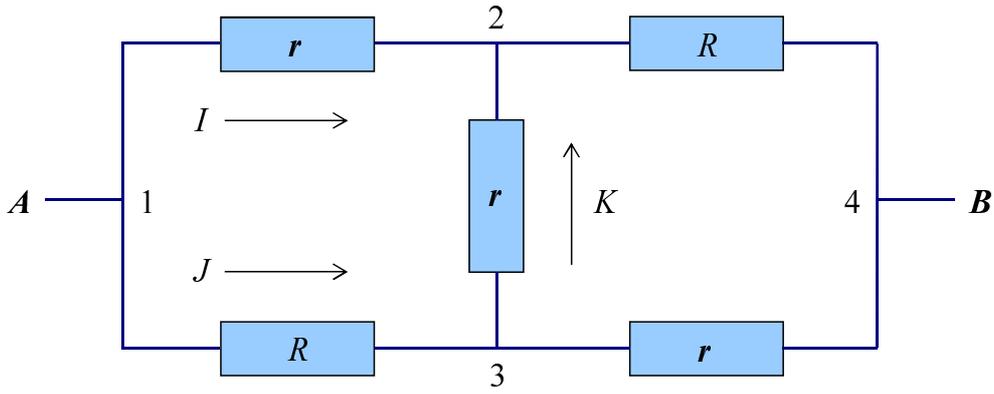


Рис. 1.4. К примеру 1.6

участке, так что ответы дадут сами уравнения. Согласно первому правилу Кирхгофа токи на участках 24 и 34 записываются как $I + K$ и $J - K$ соответственно. Предположим, что падение напряжения между A и B равно U . Так как падение напряжения на участке 12 равно rI и на участке 24 равно $R(I + K)$, второе правило Кирхгофа дает

$$rI + R(I + K) = (r + R)I + RK = U. \quad (1.13)$$

Кроме того, источники ЭДС в замкнутом контуре 123 отсутствуют, поэтому

$$rI - RJ - rK = 0. \quad (1.14)$$

Аналогичным образом для контура 243 получаем

$$R(I + K) - r(J - K) + rK = RI - rJ + (R + 2r)K = 0. \quad (1.15)$$

При заданном U величины токов получаются в результате решения системы трех линейных уравнений (1.13)–(1.15). Так, из уравнения (1.15) имеем

$$J = \frac{R}{r} I + \left(\frac{R}{r} + 2 \right) K. \quad (1.16)$$

Подстановка этого в формулу (1.14) дает $(r^2 - R^2)I - (r + R)^2 K = 0$, откуда

$$K = \frac{r - R}{r + R} I. \quad (1.17)$$

При $r > R$ имеем $K > 0$ с направлением тока от 3 к 2, а при $r < R$ получаем $K < 0$ с направлением тока от 2 к 3 (принимая направление

тока I за положительное). Подставляя (1.17) в (1.13), находим

$$I = \frac{(r + R)U}{r(r + 3R)}. \quad (1.18)$$

Теперь с помощью (1.17) и (1.16) последовательно выражаем:

$$K = \frac{(r - R)U}{r(r + 3R)}, \quad J = \frac{2U}{r + 3R}. \quad (1.19)$$

Суммарная сила тока через схему AB записывается в виде

$$I + J = \frac{(3r + R)U}{r(r + 3R)},$$

откуда искомое сопротивление

$$R_{AB} = \frac{r(r + 3R)}{3r + R}. \quad (1.20)$$

Полезно проверить результат (1.20) в некоторых частных случаях, когда ответ ясен практически без вычислений.

а) Пусть $r = R$; тогда вся схема симметрична относительно горизонтальной линии AB , а узлы 2 и 3 имеют равные потенциалы. Значит, электрический ток на участке 23 отсутствует, и его можно удалить без последствий. В результате получается схема из двух параллельно соединенных сопротивлений величиной $R + R = 2R$ с общим сопротивлением цепи $R_{AB} = R$. Тот же самый ответ следует из формулы (1.20).

б) Пусть сопротивление r пренебрежимо мало по сравнению с R , т. е. формально $r \rightarrow 0$. Здесь узлы A и B закорочены, так что сопротивление всей схемы $R_{AB} \rightarrow 0$. То же самое получается согласно (1.20).

в) Пусть теперь R пренебрежимо мало. Найдите R_{AB} для этого случая, изобразите эквивалентную схему и сравните результат с тем, который следует из формулы (1.20).

Задача 1.1. Из однородной проволоки с общим сопротивлением 10 Ом сделано кольцо. Где следует присоединить провода, подводящие ток, чтобы сопротивление получившегося элемента равнялось 1 Ом?

Задача 1.2. Имеется прибор с ценой деления 10 мкА. Шкала прибора имеет 100 делений, внутреннее сопротивление прибора $r = 50$ Ом. Как из этого прибора сделать миллиамперметр для измерения токов до 800 мА?

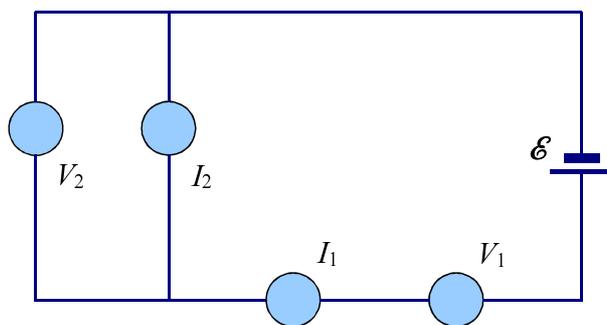


Рис. 1.5. К задаче 1.3

Задача 1.3. В схему, показанную на рис. 1.5, включены два микроамперметра и два одинаковых вольтметра. Показания микроамперметров $I_1 = 100$ мкА и $I_2 = 99$ мкА, показание вольтметра $V_1 = 10$ В. Найти показание вольтметра V_2 . Сопротивлением проводов пренебречь.

Задача 1.4. Батарея подключена один раз к внешней цепи с сопротивлением R_1 , а второй раз к цепи с сопротивлением R_2 . При этом количество теплоты, выделяемое во внешней цепи в единицу времени, одинаково и равно W . Найти ЭДС и внутреннее сопротивление батареи.

§ 2. Метод контурных токов

Основную задачу, с которой обычно приходится иметь дело при расчете цепей, можно сформулировать так. Пусть даны сопротивления всех ветвей, а также величины и направления всех ЭДС; нужно определить токи во всех ветвях цепи. Иногда оказывается возможным разбить цепь на группы последовательно и параллельно соединенных проводников, что позволяет найти ответ без составления и решения системы уравнений. Такие простые схемы являются скорее исключением. В общем, правила Кирхгофа дают возможность проанализировать любую цепь постоянного тока. Но применительно к сложной цепи с большим числом разветвлений, узлов и элементов непосредственное проведение расчетов может оказаться делом весьма непростым. Одна из основных трудностей заключается в том, что среди множества линейных соотношений, которые следуют из правил Кирхгофа, не все являются независимыми. Без предварительного анализа неясно, каким именно образом следует выбирать независимые уравнения для составления той системы, которая впоследствии будет решена. Для этого часто используют специально разработанные методы, которые в данном пособии не обсуждаются.

Объем вычислительной работы можно заметно сократить, введя так называемые контурные токи. Они практически всегда дают возможность упростить анализ электрической схемы или выявить некоторые ее свойства. Сама по себе идея достаточно проста: ток в каждой ветви записывается как сумма тех контурных токов, которые проходят через данную ветвь. Упрощение достигается, в первую очередь, за счет того, что в рамках такого подхода первое правило Кирхгофа удовлетворяется автоматически. Тем самым число подлежащих определению величин и уравнений на них ограничивается с самого начала. Понятно также, что уровень сложности последующего анализа электрической цепи будет зависеть не только от структуры самой цепи, но и от удачного пер-

воначального выбора контурных токов. Конечно, в достаточно сложной электрической цепи выбор независимых контуров будет неоднозначным. Детальное обсуждение этого вопроса сопряжено с некоторыми вопросами теории графов и выходит за рамки данного пособия.

Рассмотрим теперь задачу о нахождении уже выбранных контурных токов. Пусть в цепи выделены n независимых контуров с соответствующими контурными токами J_k . Суммарное сопротивление резисторов контура под номером k , через которые проходит контурный ток J_k , обозначим через R_{kk} . Далее, коэффициент R_{kq} учитывает все сопротивления, которые проходит ток J_q в рамках контура под номером k . Таким образом, это сумма резисторов, которые являются общими для контуров под номерами k и q . Отсюда следует, что коэффициенты системы линейных уравнений обладают свойством

$$R_{kq} = R_{qk} . \quad (2.1)$$

Эта система состоит из n уравнений, выражающих второе правило Кирхгофа применительно к каждому независимому контуру, и записывается в виде:

$$+ R_{11}J_1 \pm R_{12}J_2 \pm \dots \pm R_{1n}J_n = \pm \mathcal{E}_1 , \quad (2.2)$$

$$\pm R_{21}J_1 + R_{22}J_2 \pm \dots \pm R_{2n}J_n = \pm \mathcal{E}_2 , \quad (2.3)$$

.....

$$\pm R_{n1}J_1 \pm R_{n2}J_2 \pm \dots + R_{nn}J_n = \pm \mathcal{E}_n . \quad (2.4)$$

В этих уравнениях коэффициенты вида R_{kk} всегда положительны. В содержащем R_{kk} уравнении перед R_{kq} следует ставить знак плюс, когда токи J_k и J_q проходят по общей ветви в одном и том же направлении, и знак минус, когда они текут навстречу друг другу. Суммарная по контуру под номером k электродвижущая сила \mathcal{E}_k берется со знаком плюс, если она способствует току J_k , и со знаком минус, если она ему противодействует. Если токи J_k и J_q нигде не проходят по одной и той же ветви, то в уравнениях (2.2)–(2.4) отсутствует соответствующее слагаемое, поэтому $R_{kq} = 0$. Таким образом, матрица коэффициентов линейной системы уравнений (2.2)–(2.4) является симметричной.

По известным формулам Крамера получается, что контурный ток

$$J_k = \frac{\Delta^k}{\Delta} , \quad (2.5)$$

где $\Delta \neq 0$ – детерминант матрицы коэффициентов системы (2.2)–(2.4), а детерминант Δ_k получается из Δ заменой k -го столбца на правую часть системы. Поскольку система (2.2)–(2.4) линейна, ее решение можно представить в виде суперпозиции решений, отвечающих отдельно «включенным» ЭДС. Пусть только $\mathcal{E}_k \neq 0$, тогда

$$J_q = \frac{A_{kq}\mathcal{E}_k}{\Delta}, \quad (2.6)$$

где A_{kq} – алгебраическое дополнение R_{kq} в матрице коэффициентов системы. Ввиду симметрии (2.1) справедливо равенство

$$A_{kq} = A_{qk}. \quad (2.7)$$

Отсюда следует, что при отдельном включении в разные контуры двух равных ЭДС, а именно $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_q$, и соответствующем выборе направлений токов получаем

$$J_k = J_q. \quad (2.8)$$

Строго говоря, равенство (2.8) сформулировано для контурных токов. Но если две ветви не имеют общего узла, то контурные токи всегда можно выбрать таким образом, что в каждой из них будет протекать только один ток (хотя для этого, возможно, придется ввести дополнительные токи в некоторых других ветвях). Тогда из формулы (2.8) следует важное *соотношение взаимности*: если ЭДС, включенная в одну из двух ветвей, вызывает некоторый ток в другой ветви, то та же самая ЭДС, будучи включенной во вторую ветвь, вызывает в первой ток такой же величины.

Перейдем к обсуждению конкретных примеров использования метода контурных токов. Ограничимся рассмотрением цепей с достаточно простой структурой, когда выбор независимых контуров не вызывает трудностей.

Пример 2.1. На рис. 2.1, а дана схема потенциометра, с помощью которого можно менять напряжение U , подаваемое на некоторый прибор с сопротивлением R . Потенциометр имеет длину ℓ , сопротивление R_0 и находится под напряжением U_0 . Найти напряжение U как функцию длины x .

Решение. Введем два контурных тока I (по нижнему малому контуру) и J (см. рис. 2.1, б). Сопротивление R_0 делится на две составляющие xR_0/ℓ и $(\ell - x)R_0/\ell$. Второе правило Кирхгофа для верхнего малого

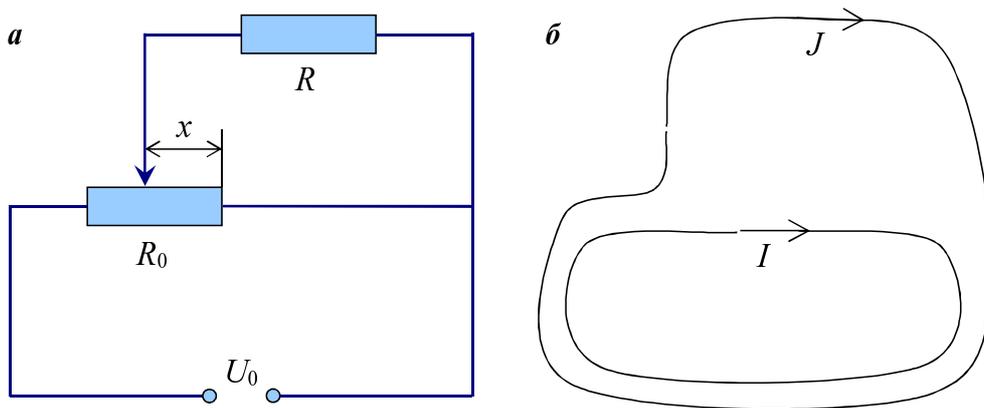


Рис. 2.1. К примеру 2.1

контура, включающего xR_0/ℓ и R , означает:

$$RJ - \frac{x}{\ell} R_0 I = 0, \quad I = \frac{\ell U}{xR_0}, \quad (2.9)$$

где искомое напряжение $U = RJ$. Для нижнего малого контура получаем

$$\frac{x}{\ell} R_0 I + \frac{\ell - x}{\ell} R_0 (I + J) = R_0 I + \frac{\ell - x}{\ell} R_0 J = U_0. \quad (2.10)$$

Вместе формулы (2.9) и (2.10) дают

$$\left(\frac{\ell}{x} + \frac{(\ell - x)R_0}{\ell R} \right) U = U_0,$$

откуда окончательно

$$U = \frac{\ell x R U_0}{\ell^2 R + x(\ell - x)R_0}. \quad (2.11)$$

Для проверки этой формулы рассмотрим крайние значения x . В случае $x = \ell$ ответ $U = U_0$ ясен без вычислений; тот же результат следует из (2.11). Если $x = 0$, то формула (2.11) дает $U = 0$; правильно ли это?

Пример 2.2. В результате повреждения телеграфной линии в некотором месте между линией и землей появляется сопротивление определенной величины. При каком расположении повреждения вдоль линии ток на ее принимающем конце будет наименьшим?

Решение. Пусть на передающем правом конце расположена батарея с ЭДС \mathcal{E} и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением.

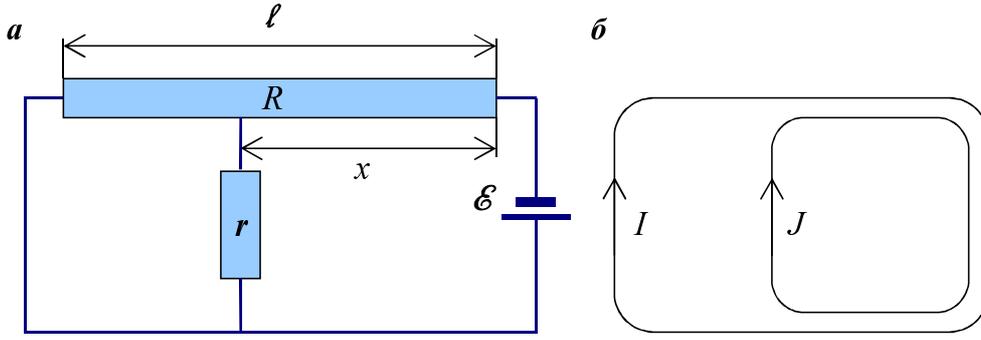


Рис. 2.2. К примеру 2.2

Обозначим через ℓ полную длину линии и через R ее полное сопротивление. Допустим, что на расстоянии x от передающего конца линии возник контакт с землей через перемычку с сопротивлением r . Итоговая схема показана на рис. 2.2, а. Введем контурный ток I , идущий по большому контуру, и ток J по правому малому контуру (см. рис. 2.2, б). Повреждение разделяет всю линию на два участка с сопротивлениями $(\ell - x)R/\ell$ и xR/ℓ соответственно. Для левого малого контура без ЭДС второе правило Кирхгофа имеет вид

$$\frac{\ell - x}{\ell} RI - rJ = 0. \quad (2.12)$$

Для правого малого контура записываем

$$\frac{x}{\ell} R(I + J) + rJ = \frac{x}{\ell} RI + \left(\frac{x}{\ell} R + r\right)J = \mathcal{E}. \quad (2.13)$$

Из уравнения (2.12) следует выражение

$$J = \frac{(\ell - x)R}{\ell r} I,$$

которое после подстановки в (2.13) дает

$$I = \frac{\ell^2 r \mathcal{E}}{R} \frac{1}{x(\ell - x)R + \ell^2 r}. \quad (2.14)$$

Если все величины, кроме x , фиксированы, то минимальное значение I соответствует максимуму функции

$$x(\ell - x) = \frac{\ell^2}{4} - \left(x - \frac{\ell}{2}\right)^2$$

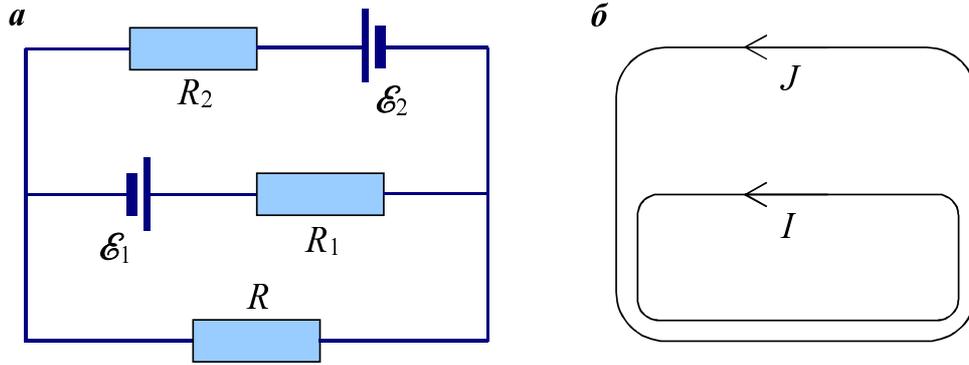


Рис. 2.3. К примеру 2.3

на интервале $x \in [0, \ell]$. Ясно, что это происходит при $x = \ell/2$, а само минимальное значение

$$\min I = \frac{4r\mathcal{E}}{R(R + 4r)}.$$

Таким образом, самым неблагоприятным является повреждение в середине передающей линии.

Пример 2.3. В схеме на рис. 2.3, а найти величину и направление тока через сопротивление R . Внутренними сопротивлениями батарей пренебречь.

Решение. Введем контурные токи I по нижнему малому контуру и J по большому контуру (см. рис. 2.3, б). Для нижнего малого контура записываем

$$R_1 I + R(I + J) = (R + R_1)I + RJ = -\mathcal{E}_1, \quad (2.15)$$

а для большого контура

$$R(I + J) + R_2 J = RI + (R + R_2)J = \mathcal{E}_2. \quad (2.16)$$

В результате решения системы двух линейных уравнений (2.15)–(2.16) получаем контурные токи:

$$I = -\frac{(R + R_2)\mathcal{E}_1 + R\mathcal{E}_2}{RR_1 + RR_2 + R_1R_2}, \quad (2.17)$$

$$J = \frac{R\mathcal{E}_1 + (R + R_1)\mathcal{E}_2}{RR_1 + RR_2 + R_1R_2}. \quad (2.18)$$

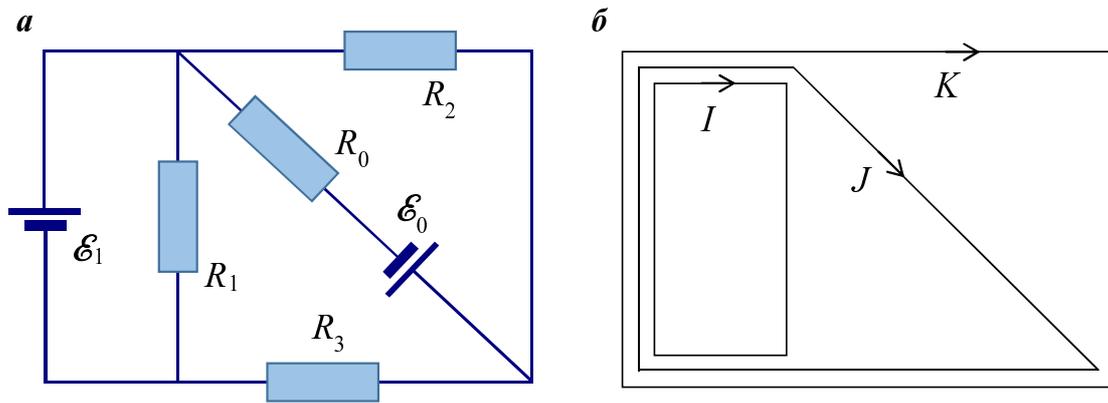


Рис. 2.4. К примеру 2.4

Таким образом, через сопротивление R протекает ток

$$I + J = \frac{R_1 \mathcal{E}_2 - R_2 \mathcal{E}_1}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2}. \quad (2.19)$$

Суммарный ток через сопротивление R направлен слева направо (как на рис. 2.3, б) при $R_1 \mathcal{E}_2 > R_2 \mathcal{E}_1$ и справа налево при $R_1 \mathcal{E}_2 < R_2 \mathcal{E}_1$; в случае $R_1 \mathcal{E}_2 = R_2 \mathcal{E}_1$ ток через сопротивление R отсутствует.

Этот пример дает возможность проиллюстрировать соотношение взаимности. ЭДС $\mathcal{E}_1 = U$, действующая в ветви с резистором R_1 , генерирует в верхней ветви рис. 2.3, а ток

$$J_U = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 / R}, \quad (2.20)$$

где учтено $\mathcal{E}_2 = 0$ и (2.18). С другой стороны, ЭДС $\mathcal{E}_2 = U$ в ветви с резистором R_2 вызывает в средней ветви рис. 2.3, а ток, модуль которого выражается формулой

$$-I_U = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 / R}. \quad (2.21)$$

Здесь мы подставили $\mathcal{E}_1 = 0$ в (2.17). Токи (2.20) и (2.21) оказались равны по величине, а знак минус в (2.21) обусловлен лишь исходным выбором направления контурного тока I на рис. 2.3, б.

Пример 2.4. В схеме на рис. 2.4, а найти величину тока через сопротивление R_0 . Внутренними сопротивлениями батарей пренебречь.

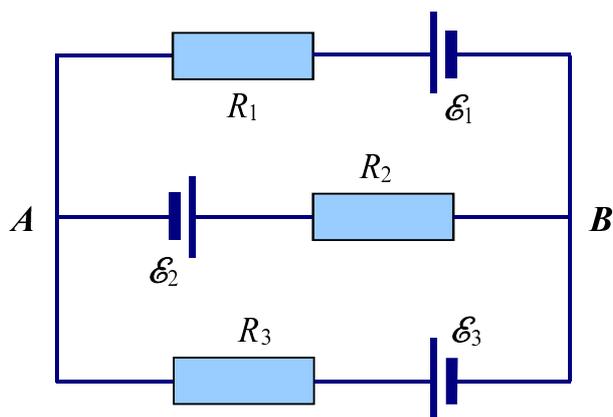


Рис. 2.5. К задаче 2.2

Решение. Введем контурные токи I , J и K так, как показано на рис. 2.4, б. ЭДС \mathcal{E}_0 генерирует в верхнем треугольнике ток по направлению против часовой стрелки. С учетом этого второе правило Кирхгофа дает

$$R_0J - R_2K = \mathcal{E}_0. \quad (2.22)$$

ЭДС \mathcal{E}_1 генерирует в большом контуре ток по часовой стрелке, откуда

$$R_2K + R_3(J + K) = R_3J + (R_2 + R_3)K = \mathcal{E}_1. \quad (2.23)$$

Искомый ток J получается в результате решения системы двух линейных уравнений (2.22)–(2.23), например, по формулам Крамера. Детерминант матрицы коэффициентов системы вычисляется по формуле

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_0 & -R_2 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix} = R_0R_2 + R_0R_3 + R_2R_3. \quad (2.24)$$

Подстановка правой части вместо первого столбца приводит к детерминанту

$$\Delta_J = \begin{vmatrix} \mathcal{E}_0 & -R_2 \\ \mathcal{E}_1 & R_2 + R_3 \end{vmatrix} = (R_2 + R_3)\mathcal{E}_0 + R_2\mathcal{E}_1. \quad (2.25)$$

Окончательный ответ записывается в виде

$$J = \frac{\Delta_J}{\Delta} = \frac{(R_2 + R_3)\mathcal{E}_0 + R_2\mathcal{E}_1}{R_0R_2 + R_0R_3 + R_2R_3}. \quad (2.26)$$

Отметим, что для получения ответа (2.26) контурный ток I не понадобился. Чему он равен? Запишите матрицу коэффициентов системы

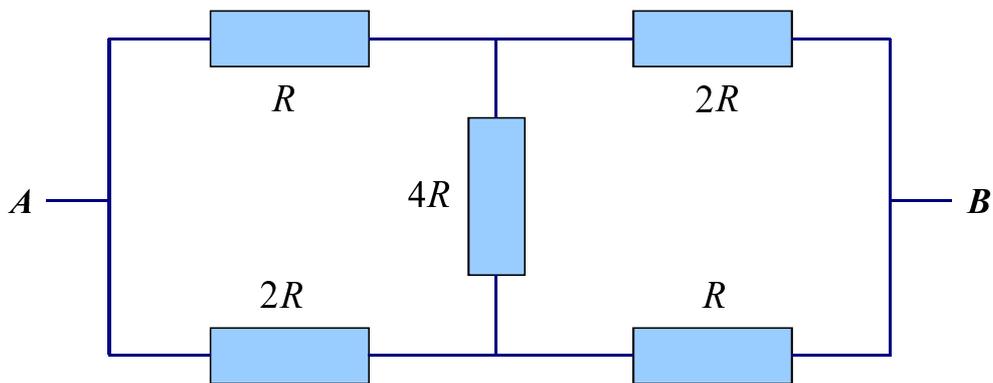


Рис. 2.6. К задаче 2.3

(2.22)–(2.23); является ли она симметричной подобно системе (2.2)–(2.4) и если нет, то почему?

Задача 2.1. Как изменится ответ на вопрос примера 2.2, если принять во внимание внутреннее сопротивление батареи?

Задача 2.2. В схеме на рис. 2.5 внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы. Найти ток через сопротивление R_1 и разность потенциалов между точками A и B .

Задача 2.3. Найти сопротивление между точками A и B в схеме на рис. 2.6.

Задача 2.4. Вершины квадрата соединены между собой и с центром квадрата однородной проволокой, причем сопротивление каждой из сторон квадрата равно r . Найти сопротивление схемы, если напряжение подается на противоположные углы одной диагонали.

§ 3. Преобразования при наличии симметрии

Анализ электрических цепей можно значительно упростить при наличии симметрий. Это значит, что имеются какие-то нетривиальные преобразования, в результате которых цепь переходит сама в себя. При этом потенциалы симметричных точек одинаковы, а по участкам, переходящим друг в друга при преобразовании симметрии, протекают равные токи. Если резистор связывает узлы с одинаковыми потенциалами, то в нем отсутствует ток, а узлы можно соединить в одну вершину. В результате исходная схема часто упрощается до эквивалентного ей варианта, в котором основные величины определяются с помощью закона Ома для участка цепи совместно с формулами для параллельного и последовательного соединения резисторов. Даже если эквивалентная схема все еще представляет сложность для анализа, использование симметрий позволяет снизить фактическое число переменных задачи и облегчить ее решение. Пожалуй, комментарии общего характера этим и ограничиваются. Более детальное обсуждение того, как соображения симметрии используются для преобразования схем, лучше провести на конкретных примерах.

Иногда построение эквивалентных схем сочетается с использованием принципа суперпозиции. Применительно к электрической цепи это означает, что наложение двух систем потенциалов и токов, которые удовлетворяют законам электромагнетизма, также является решением соответствующих уравнений. Разумеется, принцип суперпозиции справедлив лишь при условии, что определяющие уравнения являются *линейными*. Тем самым из рассмотрения надо исключить электрические цепи с нелинейными элементами. Строго говоря, по разным причинам поведение тех устройств, которые изображаются электрической цепью, почти всегда в той или иной степени отличается от линейного. В линейных цепях постоянного тока эти отклонения обычно малы, так что ими допустимо

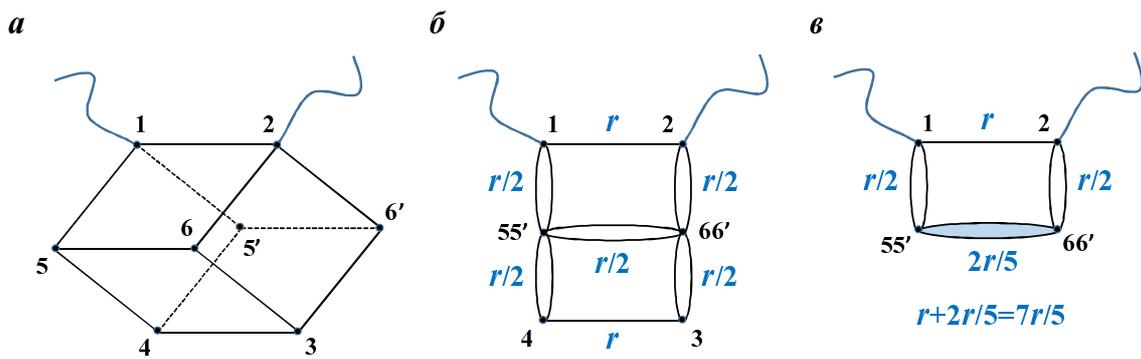


Рис. 3.1. К решению примера 3.1

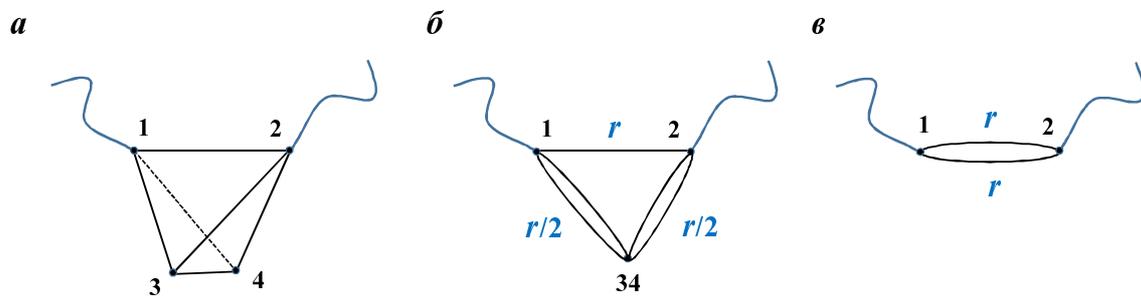


Рис. 3.2. К решению примера 3.3

пренебречь. Специально сконструированные элементы с нелинейными характеристиками чаще используются в цепях переменного тока. Вместе с тем очевидно, что изучение нелинейных электрических цепей должно основываться на четком понимании того, как работают цепи с линейными элементами.

После вводных замечаний, по необходимости имеющих несколько отвлеченный характер, рассмотрим конкретные примеры использования соображений симметрии и принципа суперпозиции.

Пример 3.1. Двенадцать одинаковых резисторов сопротивлением r соединены так, что образуют куб. Найти эквивалентное сопротивление между двумя смежными вершинами.

Решение. Обозначим вершины куба так, как показано на рис. 3.1, а. Так как схема симметрична относительно плоскости 1234, потенциалы

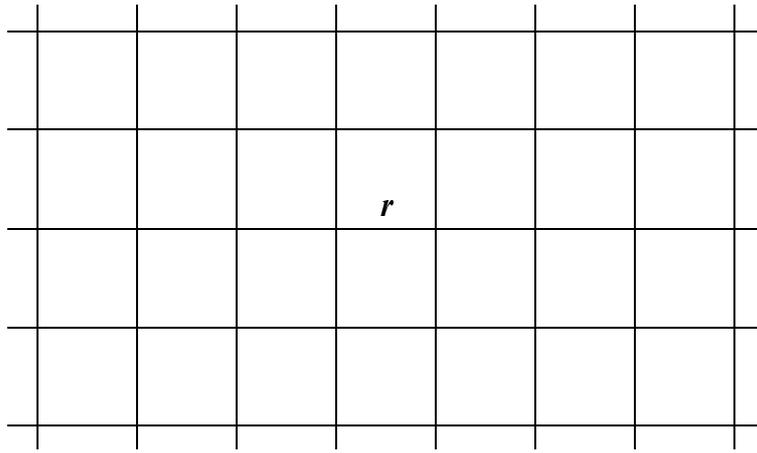


Рис. 3.3. К примеру 3.4

совпадают у пары точек 5 и 5', как и у пары точек 6 и 6'. Соединив 5 с 5' и 6 с 6', получаем схему, показанную на рис. 3.1, б. Сопротивление параллельного соединения между 55' и 66' находим из формулы

$$\frac{2}{r} + \frac{1}{2r} = \frac{5}{2r},$$

и оно равно $2r/5$. Наконец, искомое сопротивление составляет $7r/12$, что видно из рис. 3.1, в и уравнения

$$\frac{1}{r} + \frac{5}{7r} = \frac{12}{7r}.$$

Пример 3.2. Найти эквивалентное сопротивление между смежными вершинами куба из примера 3.1, если удалить соединяющий эти узлы резистор.

Решение. Рассмотрим схему из двух параллельно соединенных резисторов r и R_1 с общим сопротивлением исходной схемы

$$R_0 = \frac{rR_1}{r + R_1}. \quad (3.1)$$

Удаление резистора r равносильно пределу $r \rightarrow \infty$, в котором правая часть (3.1) дает просто R_1 . Если значение R_1 было найдено с использованием симметрии, то нужно проверить, что удаление элемента ее не нарушает. В случае куба с удаленным ребром имеем сопротивление

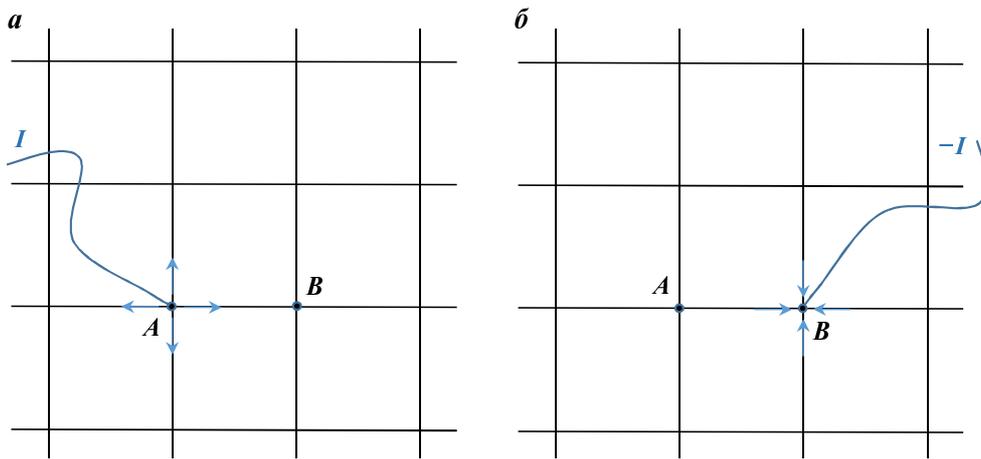


Рис. 3.4. К решению примера 3.4

$R_1 = 7r/5$, что и является ответом на вопрос. Действительно, показанные на рис. 3.1 преобразования схем остаются верными, если в каждой из них исключить верхний резистор r .

Пример 3.3. Шесть одинаковых резисторов сопротивлением r соединены так, что образуют тетраэдр. Найти эквивалентное сопротивление между двумя вершинами.

Решение. Обозначим вершины так, как показано на рис. 3.2, а. Ввиду симметрии схемы потенциалы точек 3 и 4 одинаковы, а ток по соединяющему их ребру отсутствует. Соединение вершин 3 и 4 в один узел приводит к схеме, показанной на рис. 3.2, б. Последовательное сопротивление двух резисторов $r/2$ снова дает r , откуда получаем искомое сопротивление в виде $r/2$ как результат параллельного соединения двух резисторов величиной r (см. рис. 3.2, в).

Пример 3.4. Бесконечная сетка с квадратными ячейками состоит из ребер с сопротивлением r каждое, как показано на рис. 3.3. Найти эквивалентное сопротивление между соседними узлами сетки.

Решение. Эта задача стала широко известным примером того, как используются симметрия и принцип суперпозиции. Интересующую нас систему токов и потенциалов можно получить наложением следующих двух картин, показанных на рис. 3.4: 1) провод подсоединен только к точке A , подводя ток силой I , и 2) провод подсоединен только к точке B , подводя ток силой $-I$. В силу линейности правил Кирхгофа наложение

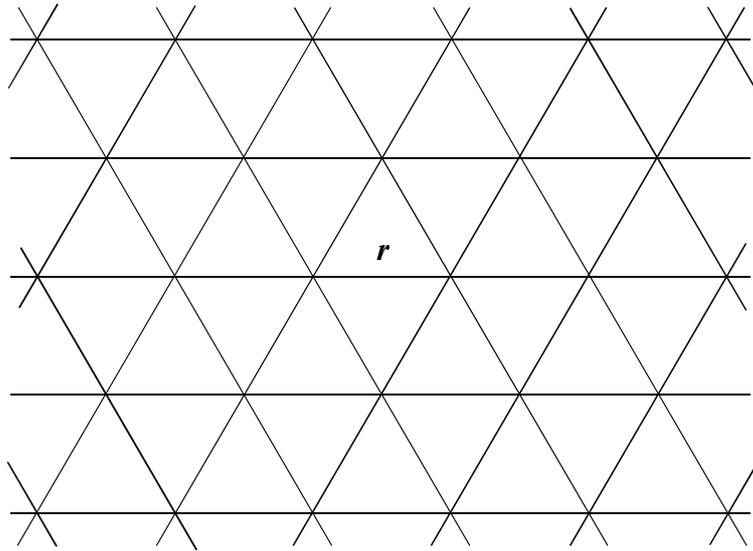


Рис. 3.5. К примеру 3.5

этих двух решений дает искомое. По соображениям симметрии ясно, что в первом случае из точки A по каждому из четырех смежных ребер вытекает ток силой $I/4$. По тем же причинам во втором случае по каждому из четырех смежных ребер в точку B втекает ток $I/4$. В результате наложения двух распределений по ребру AB будет идти ток силой $I/2$ при разности потенциалов $rI/2$. Все остальные связи, по которым из A в B проходит суммарный ток $I/2$, заменим одним эквивалентным резистором с сопротивлением, равным тоже r , поскольку оно дает ту же разность потенциалов $rI/2$. Сопротивление эквивалентной цепи с параллельным соединением двух одинаковых резисторов r равно $R_{AB} = r/2$.

Пример 3.5. Двумерная бесконечная сетка с треугольными ячейками образована соединением одинаковых отрезков с сопротивлением r каждый, как показано на рис. 3.5. Чему равно эквивалентное сопротивление между узлом и одним из шести ближайших узлов?

Решение. Снова воспользуемся принципом суперпозиции и соображениями симметрии. Заданное распределение токов и потенциалов можно получить наложением следующих двух (рис. 3.6): 1) провод подсоединен только к точке A , подводя ток силой I , и 2) провод подсоединен только к точке B , подводя ток силой $-I$. Из симметрии следует, что в первом случае из точки A по каждому из шести смежных ребер вытекает

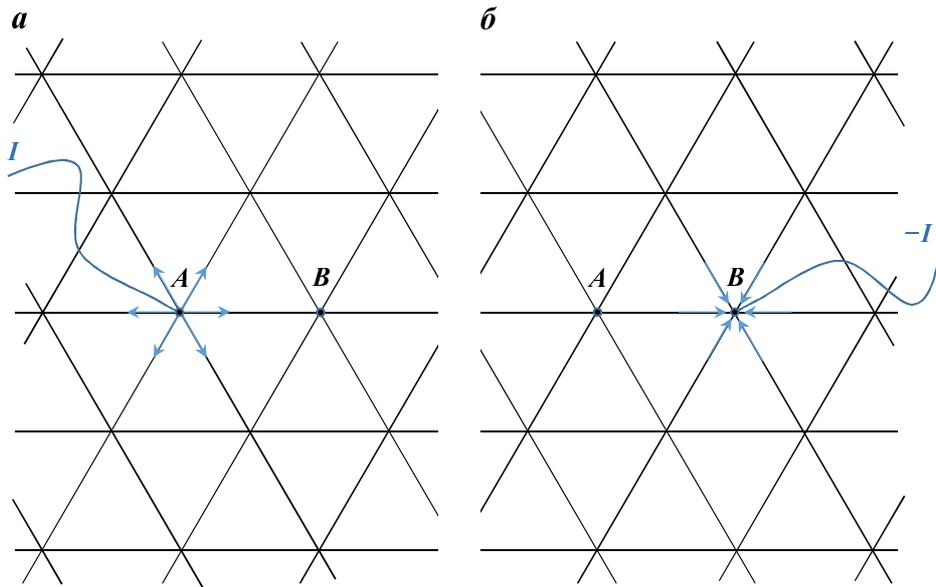


Рис. 3.6. К решению примера 3.5

ток силой $I/6$. По аналогичным причинам во втором случае в точку B по каждому из смежных ребер втекает ток $I/6$. После наложения распределений по ребру AB будет идти ток силой $I/3$, а разность потенциалов между точками составит $rI/3$. Все остальные связи, по которым из A в B проходит суммарный ток силой $2I/3$, заменим одним эквивалентным резистором с сопротивлением $r/2$, которое при прохождении тока $2I/3$ обеспечивает ту же разность потенциалов $rI/3$. Сопротивление эквивалентной цепи с параллельным соединением находим по хорошо известному правилу

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{r} + \frac{2}{r} = \frac{3}{r},$$

так что сопротивление между A и B получается в виде $R_{AB} = r/3$.

Пример 3.6. Выше были рассмотрены случаи, когда одинаковые резисторы сопротивлением r были соединены так, чтобы образовывать куб и тетраэдр. Пусть резисторы соединены между собой так, что образуют правильный многогранник. Помимо тетраэдра и куба правильными многогранниками являются октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Найти эквивалентное сопротивление между двумя соседними вершинами каждого из таких многогранников.

Решение. В примерах 3.1 и 3.3 схемы из резисторов преобразо-

вывались явным образом с учетом присущих им симметрий. Попробуем теперь использовать принцип суперпозиции подобно тому, как это было сделано в примерах 3.4 и 3.5. Рассмотрим правильный многогранник с числом вершин n , в каждой из которых сходится по s ребер. Выберем одну из вершин и подключим к ней провод, который подводит ток силой I . По аналогии с примерами 3.4 и 3.5 можно было бы предположить, что по каждому из s ребер будет вытекать ток силой I/s . Но это не так по той причине, что рассмотренные ранее сетки были бесконечными (в реальности конечными, но настолько большими, что краевыми эффектами можно пренебречь), тогда как в конечной цепи будет происходить накопление заряда. Чтобы по цепи протекал постоянный ток, необходимо обеспечить отведение заряда.

Таким образом, через оставшиеся $n - 1$ вершин нужно отводить суммарный ток I , и для сохранения симметрии он делится в равных пропорциях. Итак, первое распределение токов и потенциалов получается подведением извне тока I к вершине A и токов величиной $-I/(n - 1)$ ко всем остальным вершинам многогранника, как показано на рис. 3.7, *а*. При этом из вершины A через каждое из инцидентных ему s ребер вытекает ток I/s (см. рис. 3.7, *б*). Второе распределение токов и потенциалов получается подведением извне тока $-I$ к вершине B и токов величиной $I/(n - 1)$ ко всем остальным вершинам; при этом в вершину B через каждое из инцидентных ему s ребер втекает ток I/s . В результате наложения этих распределений к вершине A подводится ток величиной

$$I + \frac{I}{n - 1} = \frac{nI}{n - 1}, \quad (3.2)$$

и такой же ток отводится от вершины B . При этом к оставшимся $n - 2$ вершинам никакие токи извне не подводятся. По ребру, соединяющему вершины A и B , протекает ток $2I/s$, поэтому разность потенциалов между ними равна $2Ir/s$. По остальным участкам цепи протекает суммарный ток величиной

$$\frac{nI}{n - 1} - \frac{2I}{s} = \frac{(ns - 2n + 2)I}{(n - 1)s}. \quad (3.3)$$

Отсюда следует, что все остальные ребра многогранника можно заменить одним эквивалентным резистором с сопротивлением

$$r' = \frac{2Ir}{s} \frac{(n - 1)s}{(ns - 2n + 2)I} = \frac{2(n - 1)r}{ns - 2n + 2}. \quad (3.4)$$

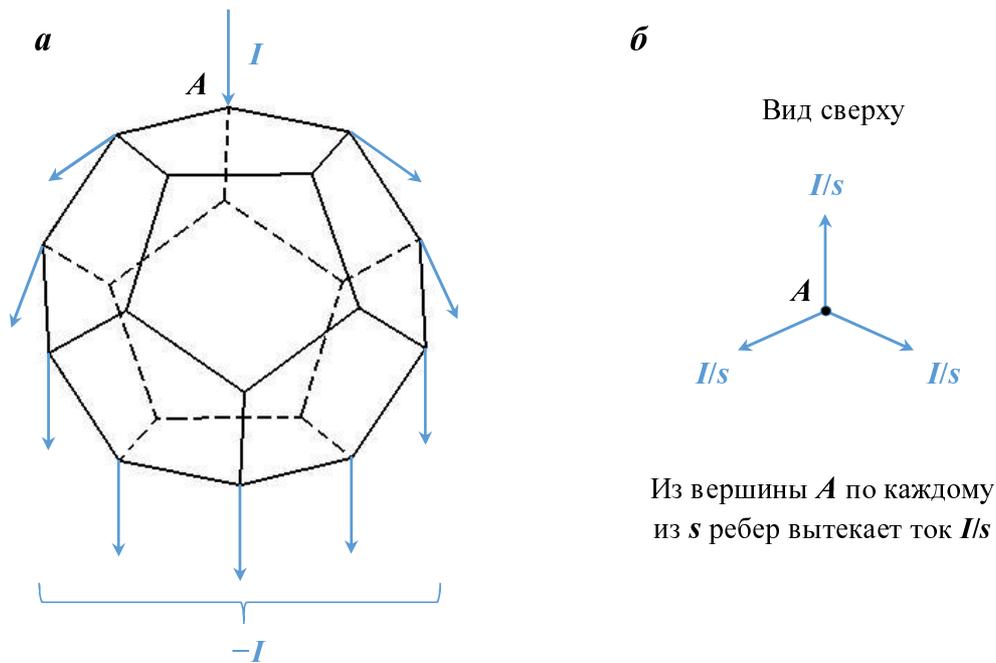


Рис. 3.7. К решению примера 3.6

Искомое сопротивление цепи между вершинами A и B находим как результат параллельного соединения r и r' :

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{ns - 2n + 2}{2(n-1)} \right) = \frac{ns}{2(n-1)r},$$

$$R_{AB} = \frac{2(n-1)r}{ns}.$$
 (3.5)

Таким образом, искомое сопротивление (3.5) выражается через общее число вершин n и число ребер s , сходящихся в одной вершине. Сопротивление одного ребра r выступает здесь в роли размерного параметра.

Рассмотрим полученный ответ в конкретных случаях. Для тетраэдра $n = 4$ и $s = 3$, поэтому формула (3.5) дает $R_{AB} = r/2$, что уже было получено в примере 3.3. Куб, или гексаэдр, имеет $n = 8$ вершин, в каждой из которых сходится по $s = 3$ ребра; из (3.5) получаем тогда $R_{AB} = 7r/12$, как и было найдено в примере 3.1. Для октаэдра имеем $n = 6$ и $s = 4$, поэтому сопротивление между соседними вершинами выражается формулой

$$R_{AB} = \frac{5r}{12}.$$
 (3.6)

Наконец, для додекаэдра и икосаэдра записываем соответственно:

$$R_{AB} = \frac{19r}{30} \quad (n = 20, s = 3), \quad (3.7)$$

$$R_{AB} = \frac{11r}{30} \quad (n = 12, s = 5), \quad (3.8)$$

Заметим, что в последних двух случаях проанализировать схему явным образом по аналогии с примерами 3.1 и 3.3 было бы затруднительно. Действительно, оба эти многогранника содержат по 30 ребер, так что соответствующие схемы оказываются довольно-таки сложными по своей структуре, а количество шагов, необходимых для упрощения схем, заметно возрастает. Принцип суперпозиции позволяет осуществить унифицированный анализ правильных многогранников, составленных из резисторов. Такой анализ иллюстрирует также известное утверждение о том, что подходящее обобщение формулировки задачи иногда помогает найти ее решение. Рассмотренные примеры еще раз подчеркивают роль и значимость принципа суперпозиции при условии его применимости.

Задача 3.1. Найти сопротивление куба из примера 3.1, если клеммы источника подключены к концам диагонали куба.

Задача 3.2. Найти эквивалентное сопротивление между соседними узлами бесконечной трехмерной решетки с кубическими ячейками, если сопротивление каждого ребра равно r .

Задача 3.3. Двумерная бесконечная сетка с шестиугольными ячейками образована соединением одинаковых отрезков с сопротивлением r каждый. Найти эквивалентное сопротивление между узлом и одним из трех соседних узлов.

Задача 3.4. Найти эквивалентное сопротивление между соседними узлами сеток из примеров 3.4 и 3.5, если соединяющее эти узлы ребро удалено.

§ 4. Преобразования типа «звезда – треугольник»

Если электрическая схема наделена той или иной симметричной структурой, то часто удается перейти к более простой эквивалентной схеме, токи и сопротивления в которой легко рассчитать. Соответствующие примеры были рассмотрены в предыдущем параграфе. Следует отметить, что в процессе решения все равно применялись известные формулы

$$R_{ser} = R_1 + R_2 \quad (4.1)$$

для последовательного соединения двух сопротивлений и

$$\frac{1}{R_{par}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (4.2)$$

для параллельного соединения. Конечно, эти формулы непосредственно вытекают из закона Ома для участка цепи. Как видно на примере уже рассмотренных электрических схем без явной симметрии, преобразования типа (4.1) и (4.2) сравнительно редко дают возможность найти потенциалы и токи без использования правил Кирхгофа. Тем не менее есть еще один исключительно полезный тип преобразований, который обсуждается ниже. В отличие от преобразований (4.1) и (4.2), такие преобразования имеют дело уже с *тремя* сопротивлениями, поскольку других вариантов соединения двух резисторов как цельных элементов просто не существует.

Что же следует понимать под термином «преобразование цепи»? Предположим, что имеется сложная схема из резисторов, имеющая множество выводов и подключенная к источникам. Заменим эту схему другой, с тем же числом выводов, причем так, чтобы сопротивления между двумя любыми выводами у новой схемы были такими же, как и у исходной. Ясно, что источники «ничего не узнают» об этой замене, поэтому токи, потребляемые схемой, останутся прежними. Но вторая схема, быть может, окажется проще первой и даже будет допускать последу-

ющие упрощения, основанные на формулах (4.1) и (4.2). Если удастся преобразовать схему к виду настолько простому, что все интересующие нас величины получаются без решения громоздкой системы уравнений, то цель достигнута.

Рассмотрим вопрос о том, как связаны друг с другом две схемы, имеющие по три вывода и показанные на рис. 4.1. Резисторы схемы типа «звезда» обозначим через r_1 , r_2 и r_3 , а резисторы схемы типа «треугольник» – через R_{12} , R_{23} и R_{31} . Такие обозначения удобны тем, что показывают узлы, между которыми включено сопротивление. Составим теперь систему уравнений, описывающую соотношение между сопротивлениями. Проще выразить резисторы «звезды» через стороны «треугольника». Например, сопротивление между узлами 1 и 2 выражается двумя способами как

$$r_1 + r_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} . \quad (4.3)$$

В левой части (4.3) стоит последовательное соединение резисторов r_1 и r_2 «звезды», а в правой части – результат параллельного соединения сторон R_{12} и $R_{23} + R_{31}$ «треугольника». Аналогичным образом получаем уравнения:

$$r_2 + r_3 = \frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} , \quad (4.4)$$

$$r_3 + r_1 = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} . \quad (4.5)$$

Сложив все три уравнения и поделив обе части на 2, получаем

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{R_{12}R_{23} + R_{23}R_{31} + R_{31}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} . \quad (4.6)$$

Вычитая из последней формулы одно из трех уравнений (4.3)–(4.5), находим последовательно величины резисторов «звезды» по отдельности:

$$r_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} , \quad (4.7)$$

$$r_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} , \quad (4.8)$$

$$r_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} . \quad (4.9)$$

В принятых обозначениях эти выражения достаточно легко запоминаются. В знаменателе стоит сумма всех трех сторон «треугольника», тогда

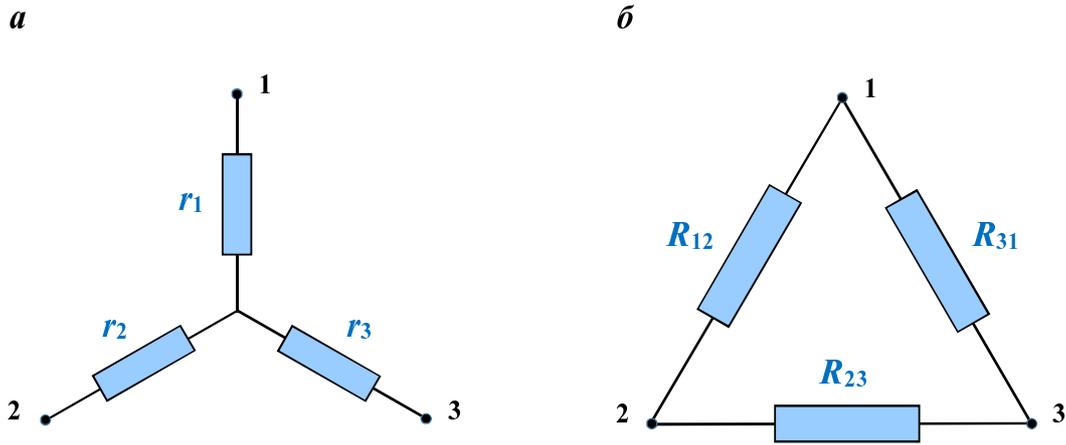


Рис. 4.1. Схемы с тремя выводами: *а* – «звезда»; *б* – «треугольник»

как числитель содержит произведение сторон, инцидентных нужной вершине.

Сложнее получить формулы, выражающие R_{12} , R_{23} и R_{31} через r_1 , r_2 и r_3 . Ниже представлен детальный вывод формул для преобразования, обратного к (4.7)–(4.9). Чтобы не заниматься чисто алгебраическими выкладками, мало связанными с физической стороной дела, полезно вернуться к закону Ома и правилам Кирхгофа. Обозначим потенциалы контактов на рис. 4.1, *а* через φ_1 , φ_2 и φ_3 . Эти величины изменяются независимо друг от друга, так как на любую пару контактов можно подать выбранное нами напряжение. Идущие в центральный узел токи записываются в виде:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{r_1}, \quad (4.10)$$

$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{r_2}, \quad (4.11)$$

$$I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_0}{r_3}. \quad (4.12)$$

Значение потенциала φ_0 в центре находим из условия $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ (первое правило Кирхгофа), что совместно с (4.10)–(4.12) дает

$$\varphi_0 = r_0 \left(\frac{\varphi_1}{r_1} + \frac{\varphi_2}{r_2} + \frac{\varphi_3}{r_3} \right). \quad (4.13)$$

Входящее в формулу (4.13) сопротивление r_0 определяется уравнением

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}. \quad (4.14)$$

Тем самым равенства (4.10)–(4.12) преобразуются к виду:

$$I_1 = \varphi_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{r_0}{r_1^2} \right) - \frac{r_0}{r_1} \left(\frac{\varphi_2}{r_2} + \frac{\varphi_3}{r_3} \right), \quad (4.15)$$

$$I_2 = \varphi_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{r_0}{r_2^2} \right) - \frac{r_0}{r_2} \left(\frac{\varphi_3}{r_3} + \frac{\varphi_1}{r_1} \right), \quad (4.16)$$

$$I_3 = \varphi_3 \left(\frac{1}{r_3} - \frac{r_0}{r_3^2} \right) - \frac{r_0}{r_3} \left(\frac{\varphi_1}{r_1} + \frac{\varphi_2}{r_2} \right). \quad (4.17)$$

Эти уравнения нужно сопоставить с формулами, которые выражают входящие извне токи I_1 , I_2 и I_3 через те, которые протекают по сторонам «треугольника» на рис. 4.1, б. Записывая по закону Ома формулы:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_{12}} + \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R_{31}} = \varphi_1 \left(\frac{1}{R_{31}} + \frac{1}{R_{12}} \right) - \frac{\varphi_2}{R_{12}} - \frac{\varphi_3}{R_{31}}, \quad (4.18)$$

$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_{12}} + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_{23}} = \varphi_2 \left(\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{23}} \right) - \frac{\varphi_3}{R_{23}} - \frac{\varphi_1}{R_{12}}, \quad (4.19)$$

$$I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_{31}} + \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{R_{23}} = \varphi_3 \left(\frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_{31}} \right) - \frac{\varphi_1}{R_{31}} - \frac{\varphi_2}{R_{23}}, \quad (4.20)$$

приравниваем коэффициенты при φ_1 , φ_2 и φ_3 в двух выражениях для каждого из трех токов. В результате получается, что:

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{r_0}{r_1 r_2}, \quad \frac{1}{R_{23}} = \frac{r_0}{r_2 r_3}, \quad \frac{1}{R_{31}} = \frac{r_0}{r_3 r_1}.$$

Так, сопоставление коэффициентов при φ_2 и φ_3 в правых частях (4.15) и (4.18) позволяет найти величины, обратные, соответственно, резисторам R_{12} и R_{31} . С учетом (4.14) последние уравнения дают искомые сопротивления сторон «треугольника» в виде:

$$R_{12} = \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}{r_3}, \quad (4.21)$$

$$R_{23} = \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}{r_1}, \quad (4.22)$$

$$R_{31} = \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}{r_2}. \quad (4.23)$$

Несмотря на сложность получения, запомнить формулы (4.21)–(4.23) довольно легко: числитель один и тот же у всех трех дробей, а в знаменателе стоит тот индекс, который отсутствует слева.

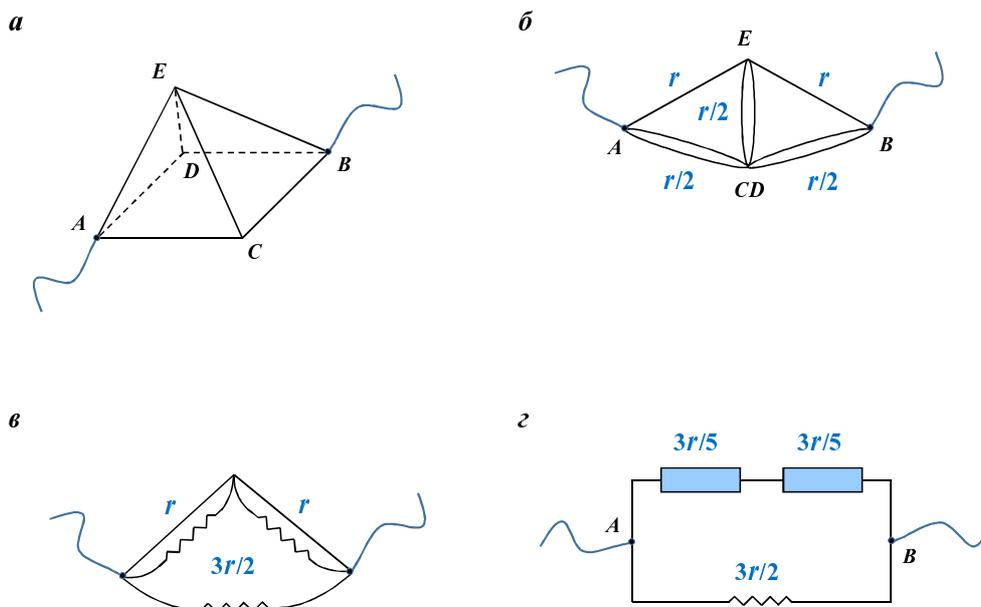


Рис. 4.2. К решению примера 4.1

Итак, для преобразования «треугольника» в «звезду» используются формулы (4.7)–(4.9), а для преобразования «звезды» в «треугольник» – формулы (4.21)–(4.23). В курсах теоретической электротехники рассматриваются более общие преобразования цепей постоянного тока на основе «звезд» с произвольным числом сопротивлений. Формулы для описания этих изменений выводятся с помощью рассуждений, аналогичных тем, что привели к соотношениям (4.21)–(4.23). Как видно из представленных ниже примеров, если какая-то схема допускает преобразования типа «звезда – треугольник», то изменить ее можно несколькими способами. Рекомендуется выбирать такой путь, который учитывает, при их наличии, симметрии «звезды» или «треугольника» и т.д.

Пример 4.1. Из однородной проволоки изготовлен каркас пирамиды с квадратным основанием, а сопротивление каждого из ребер равно r . Найти эквивалентные сопротивления между противоположными вершинами основания.

Решение. Обозначим вершины пирамиды так, как показано на рис. 4.2, *a*. Из симметрии относительно плоскости *AEB* следует, что потенциалы вершин *C* и *D* совпадают. В результате возникает схема,

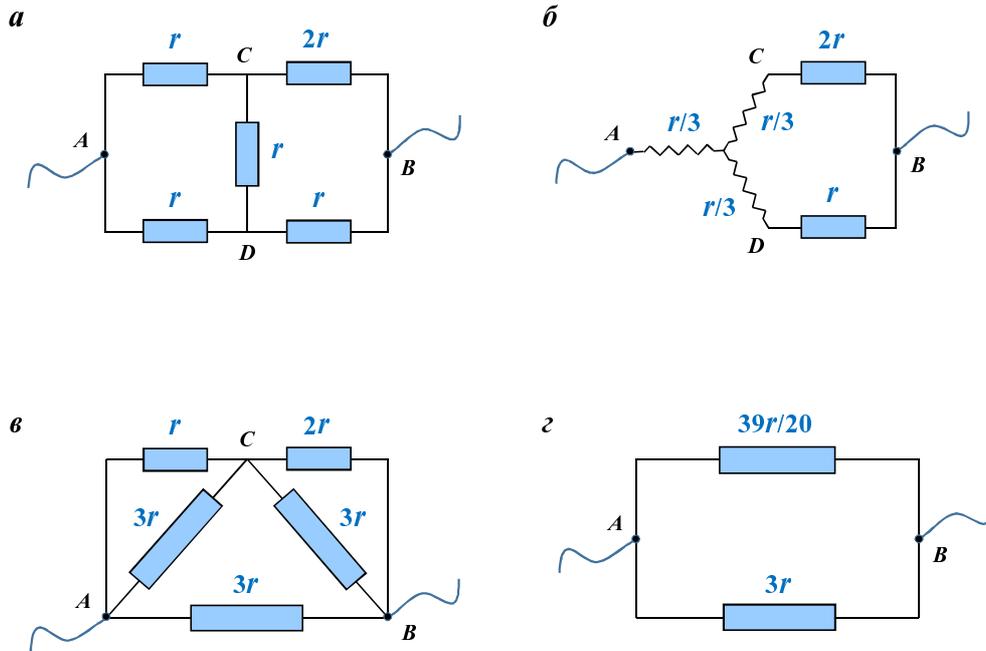


Рис. 4.3. К решению примера 4.2

изображенная на рис. 4.2, б. Нижняя часть схемы представляет собой «звезду» из трех одинаковых резисторов величиной $r/2$. По формулам (4.21)–(4.23) получается равносторонний «треугольник» со сторонами, равными

$$\frac{3r^2}{4} \frac{2}{r} = \frac{3r}{2}. \quad (4.24)$$

После замены «звезды» на «треугольник» имеем параллельное соединение двух сопротивлений (см. рис. 4.2, в). Одно из них равно (4.24), а второе есть результат последовательности двух параллельных соединений, каждое из которых записывается в виде

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{2}{3r} \right)^{-1} = \frac{3r}{5}.$$

Наконец, из рис. 4.2, г видно, что искомое сопротивление определяется формулой

$$R_{AB} = \left(\frac{2}{3r} + \frac{5}{6r} \right)^{-1} = \frac{2r}{3}.$$

Пример 4.2. Найти сопротивление между точками A и B в схеме на рис. 4.3, а.

Решение. Схемы этого типа называют «мостами», причем «мост» в данном случае не уравновешен. *Первый способ* заключается в преобразовании левой части схемы из «треугольника» ACD в «звезду», как показано на рис. 4.3, б. Этот шаг наиболее очевиден ввиду того, что сопротивления всех сторон этого «треугольника» равны r , т. е. он равносторонний. Тогда любая из формул (4.7)–(4.9) дает $r/3$. Параллельное соединение сопротивлений $7r/3$ и $4r/3$ находим из соотношения

$$\frac{3}{7r} + \frac{3}{4r} = \frac{12 + 21}{28r} = \frac{33}{28r}.$$

Поэтому сопротивление всей цепи выражается формулой

$$R_{AB} = \frac{r}{3} + \frac{28r}{33} = \frac{39r}{33} = \frac{13r}{11}. \quad (4.25)$$

Разумеется, преобразование из «треугольника» в «звезду» можно было бы применить и к правой части схемы, но «треугольник» BCD является лишь равнобедренным.

Второй способ состоит в преобразовании нижней части схемы из «звезды» ACB в «треугольник», как показано на рис. 4.3, в. Все резисторы «звезды» равны r , так что каждая из формул (4.21)–(4.23) приводит к значению $3r$. В верхней части схемы возникают два параллельных соединения, состыкованных последовательно. Значения этих параллельных соединений находим из формул:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{3r} = \frac{4}{3r}, \quad \frac{1}{2r} + \frac{1}{3r} = \frac{5}{6r},$$

а результат их последовательного расположения

$$\frac{3r}{4} + \frac{6r}{5} = \frac{(15 + 24)r}{20} = \frac{39r}{20}. \quad (4.26)$$

Наконец, сопротивление всей цепи получаем как итог параллельного соединения (4.26) и $3r$ (см. рис. 4.3, г), а именно

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{20}{39r} + \frac{1}{3r} = \frac{20 + 13}{39r} = \frac{11}{13r},$$

что снова приводит к ответу (4.25). Конечно, преобразование из «звезды» в «треугольник» можно было бы применить и к верхней части схемы на рис. 4.3. Это немного усложнило бы вычисления, поскольку резисторы «звезды» ADB различаются.

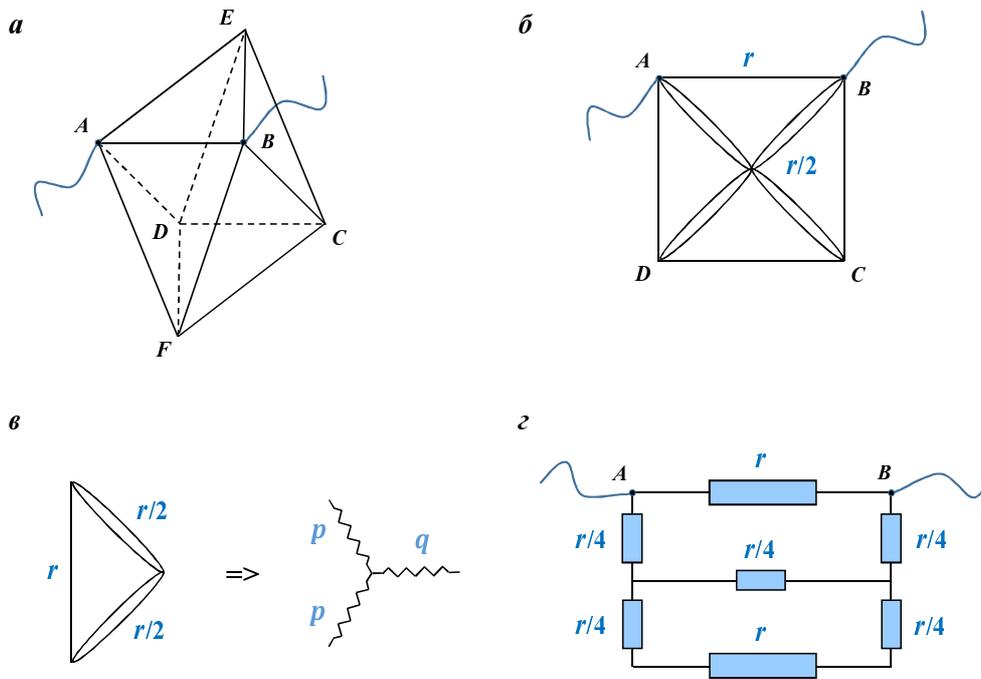


Рис. 4.4. К решению примера 4.3

Пример 4.3. Двенадцать одинаковых резисторов сопротивлением r соединены так, что образуют октаэдр. Найти эквивалентное сопротивление между двумя смежными вершинами.

Решение. Составленный из одинаковых резисторов октаэдр уже рассматривался в примере 3.6. Здесь сопротивление между двумя смежными вершинами будет найдено с помощью преобразований типа «звезда – треугольник». Как видно из рис. 4.4, *a*, схема симметрична относительно плоскости $ABCD$, так что потенциалы вершин E и F равны. Это позволяет перейти к схеме, показанной на рис. 4.4, *б*, но здесь мы все еще не можем использовать формулы (4.1) и (4.2). Узлы подключения A и B инцидентны основаниям двух равнобедренных «треугольников», один из которых показан на рис. 4.4, *в* и трансформируется в «звезду», изображенную рядом. Резисторы «звезды» можно было бы найти по формулам (4.7)–(4.9), но в данном случае ясно, что

$$p + p = \frac{r}{2}, \quad p + q = \left(\frac{2}{r} + \frac{2}{3r} \right)^{-1} = \frac{3r}{8},$$

откуда $p = r/4$ и $q = r/8$. Ввиду $q + q = r/4$ схема на рис. 4.4, *б* преоб-

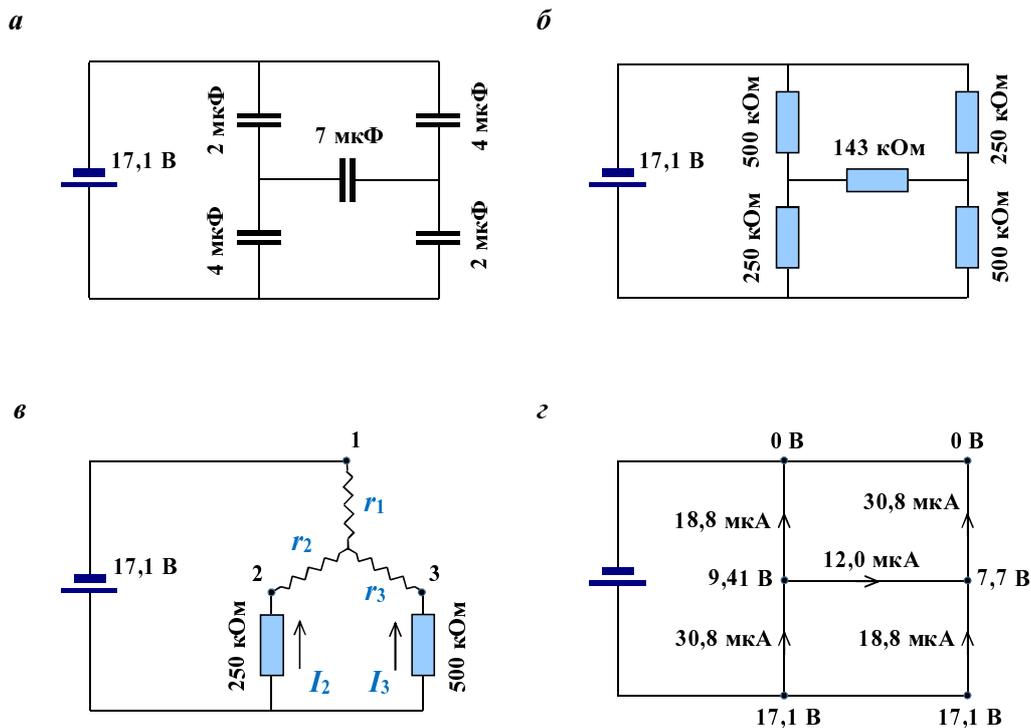


Рис. 4.5. К решению примера 4.4

разуется к виду, показанному на рис. 4.4, г. Параллельное соединение резисторов $r/4$ и $3r/2$ дает

$$\left(\frac{4}{r} + \frac{2}{3r}\right)^{-1} = \frac{3r}{14}.$$

Таким образом, искомое сопротивление есть результат параллельного соединения сопротивлений r и

$$\frac{r}{4} + \frac{3r}{14} + \frac{r}{4} = \frac{5r}{7},$$

или просто

$$R_{AB} = \left(\frac{1}{r} + \frac{7}{5r}\right)^{-1} = \frac{5r}{12}.$$

Как и следовало ожидать, мы снова получили результат (3.6).

Пример 4.4. Рассмотренные выше преобразования можно использовать для анализа схем из конденсаторов. В схеме на рис. 4.5, а найти заряд на конденсаторе емкостью 7 мкФ.

Решение. Начнем с того, что сопоставим закон Ома для участка цепи (1.1) и определение емкости конденсатора

$$C = \frac{Q}{U},$$

где Q – накопленный конденсатором заряд. Последнюю формулу можно переписать в виде

$$U = Q \frac{1}{C}, \quad (4.27)$$

аналогичном формуле $U = IR$. В правой части (4.27) вместо силы тока стоит заряд, а вместо сопротивления – величина, обратная емкости. Заряд на интересующем нас конденсаторе можно найти следующим образом. Перерисуем схему с резисторами вместо конденсаторов, причем емкость $X \Phi$ заменяется на сопротивление X^{-1} Ом. После того как найден ток $Y \text{ А}$ через соответствующий резистор, заряд на послужившем прообразом конденсаторе будет равен $Y \text{ Кл}$. Разумеется, в преобразованной схеме внутренние сопротивления батарей следует игнорировать.

Схема с резисторами вместо конденсаторов показана на рис. 4.5, б. Есть несколько вариантов ее изменения, например, преобразовать верхний «треугольник» в «звезду». Помечая вершины согласно рис. 4.5, в, имеем $R_{12} = 500 \text{ кОм}$, $R_{23} = 143,0 \text{ кОм}$ (с округлением до трех значащих цифр) и $R_{31} = 250 \text{ кОм}$. Тогда по формулам (4.7)–(4.9) получаем:

$$r_1 = 140 \text{ кОм}, \quad r_2 = 80 \text{ кОм}, \quad r_3 = 40 \text{ кОм}.$$

Как видно из схемы на рис. 4.5, в, полное сопротивление рассчитывается как последовательное соединение r_1 и параллельного соединения $r'_2 = r_2 + 250 = 330 \text{ кОм}$ и $r'_3 = r_3 + 500 = 540 \text{ кОм}$. Вычисляя полный ток по формуле

$$I = \mathcal{E} \left(r_1 + \frac{r'_2 r'_3}{r'_2 + r'_3} \right)^{-1}$$

с $\mathcal{E} = 17,1 \text{ В}$, получаем $I = 49,6 \text{ мкА}$. Этот ток складывается из токов I_2 и I_3 , идущих через резистор 250 кОм в узел 2 и через резистор 500 кОм в узел 3 соответственно. Записывая очевидные соотношения:

$$I_2 = \frac{r'_3 I}{r'_2 + r'_3}, \quad I_3 = \frac{r'_2 I}{r'_2 + r'_3},$$

находим разность $I_2 - I_3$, дающую ток через интересующий нас резистор $143,0 \text{ кОм}$. В результате подстановки числовых данных получаем, с точностью до трех значащих цифр, силу тока $12,0 \text{ мкА}$, поэтому заряд на

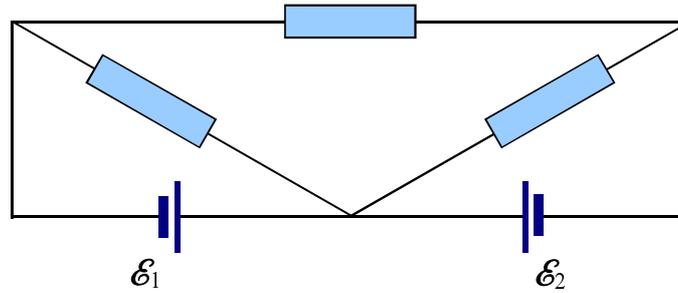


Рис. 4.6. К задаче 4.1

конденсаторе емкостью 7 мкФ равен $12,0 \text{ мкКл}$. На рис. 4.5, z значения потенциала в узлах схемы и протекающие между узлами токи приведены с округлением до трех значащих цифр. Нетрудно убедиться в том, что закон Ома в форме

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}$$

действительно выполнен для всех участков цепи.

Задача 4.1. В схеме, показанной на рис. 4.6, найти токи, текущие через батареи с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 1 \text{ В}$ и $\mathcal{E}_2 = 2 \text{ В}$. Все резисторы имеют сопротивление 3 Ом , а внутренними сопротивлениями батарей можно пренебречь.

Задача 4.2. Найти сопротивление между точками A и B в схеме на рис. 2.6 с помощью преобразований типа «звезда – треугольник».

Задача 4.3. Найти сопротивление пирамиды из примера 4.1, если клеммы источника подключены к соседним вершинам основания.

Задача 4.4. Из однородной проволоки изготовлен каркас в виде квадрата со стороной $2a$, разделенный ребрами на квадраты со стороной a . Сопротивление контактов в точках пересечения проволок пренебрежимо мало. Найти длину отрезка проволоки, сопротивление которого равно сопротивлению между углом каркаса и ближайшим к нему контактом.

§ 5. Закон Ома в дифференциальной форме

Закон Ома в дифференциальной форме позволяет описать электропроводящие свойства материала безотносительно к геометрическим характеристикам проводника как объемного тела. Для *изотропных* материалов закон имеет вид

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

где \mathbf{j} – вектор плотности электрического тока, σ – удельная проводимость (величина, обратная удельному сопротивлению), а \mathbf{E} – вектор напряженности электрического поля. В случае *анизотропных* материалов удельная проводимость является тензором второго ранга, при этом векторы плотности тока и напряженности могут быть неколлинеарны. В примерах на использование закона Ома в дифференциальной форме нами будут рассмотрены только изотропные материалы.

При постоянном токе в проводящей среде количество заряда, втекающего в любой элемент объема, должно равняться количеству заряда, вытекающего из него. Следовательно, интеграл от нормальной составляющей плотности электрического тока, взятый по поверхности, ограничивающей этот объем, должен быть равен нулю. Применяя теорему Остроградского – Гаусса, получаем

$$\oiint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{j} \, dv = 0. \quad (5.1)$$

Поскольку данное равенство выполняется для всех элементов объема, дивергенция плотности тока всюду равна нулю, т. е.

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (5.2)$$

Иными словами, вектор плотности постоянного тока является *соленоидальным*. С учетом закона Ома в дифференциальной форме для однородной изотропной проводящей среды имеем

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad (5.3)$$

где φ – электростатический потенциал. Полученное уравнение Лапласа подчеркивает аналогию с электростатическими задачами. При рассмотрении постоянных токов в проводящей среде линии тока находятся в таком же отношении к эквипотенциальным поверхностям, как и силовые линии в электростатике.

Закон преломления силовых линий и трубок тока на плоской границе между двумя изотропными электропроводящими средами вытекает из непрерывности нормальной компоненты плотности электрического тока и тангенциальной компоненты напряженности электрического поля, а именно:

$$j_n = j'_n, \quad (5.4)$$

$$E_\tau = E'_\tau. \quad (5.5)$$

Вместе с законом Ома в дифференциальной форме уравнение (5.4) дает

$$\sigma E_n = \sigma' E'_n, \quad (5.6)$$

где σ и σ' – проводимости первой и второй сред. Обозначив через θ и θ' углы между соответствующими векторами и нормалью к границе, как показано на рис. 5.1, делением формулы (5.6) на (5.5) получаем искомое соотношение

$$\sigma \operatorname{ctg} \theta = \sigma' \operatorname{ctg} \theta'. \quad (5.7)$$

Если проводимость одной из сред значительно превосходит проводимость другой, скажем, $\sigma \ll \sigma'$, то угол θ мал по сравнению с θ' . Иными словами, силовые линии и трубки тока проникают в среду с очень высокой проводимостью практически нормально к границе.

Протекание тока через электропроводящую среду приводит, как известно, к выделению тепла. Для однородных проводников в электрических цепях применяется закон Джоуля – Ленца в интегральной форме. Напомним, что при прохождении электрического тока I через элемент с сопротивлением R мощность тепловыделения описывается формулой (1.2). В этом параграфе нам понадобится закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме. Для изотропных материалов он записывается в виде

$$w = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \rho j^2 = \sigma E^2, \quad (5.8)$$

где w – мощность тепловыделения в единице объема, ρ – удельное сопротивление.

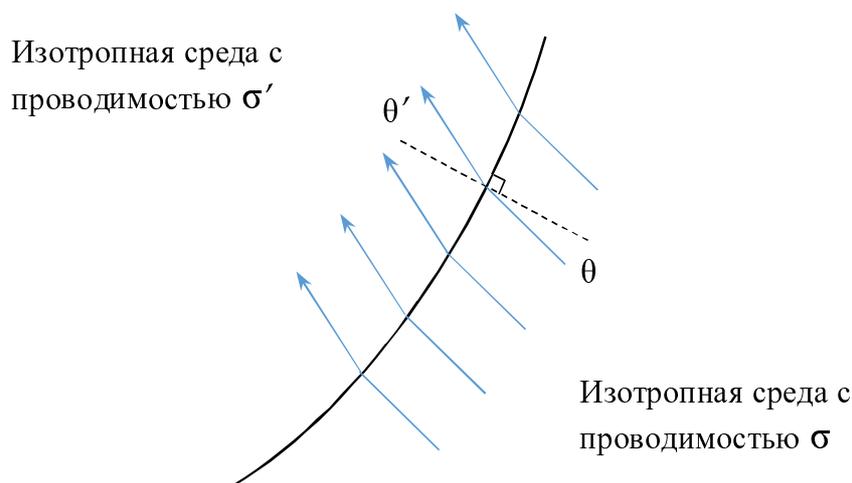


Рис. 5.1. О преломлении силовых линий на границе раздела двух однородных изотропных сред

Ниже рассмотрены несколько примеров использования закона Ома в дифференциальной форме с учетом отмеченной выше электростатической аналогии. Для получения ответа в этих примерах достаточно сравнительно несложных выкладок, что обусловлено применением соображений симметрии и принципа суперпозиции.

Пример 5.1. Физики экспериментируют с одной из граней очень большого однородного куба. На грани нарисована правильная пятиконечная звезда с расстоянием 6 см между смежными острями. К концам 1 и 2 звезды подсоединены провода с электрическим током, как показано на рис. 5.2. Амперметр показывает силу тока 1 кА. Подключение вольтметра к концам 3 и 4 обнаруживает разность потенциалов 0,2 мВ. Найти удельное сопротивление вещества куба, предполагая, что оно заполняет все полупространство по другую сторону от лицевой плоскости.

Решение. Используем соображения симметрии и принцип суперпозиции. В силу линейности уравнений Максвелла сумма двух решений также является их решением. Рассмотрим плоскость, на которой нарисована звезда и полупространство за которой заполнено однородным проводником. Интересующую нас физическую картину можно получить наложением следующих двух: 1) провод подсоединен только к точке 1,

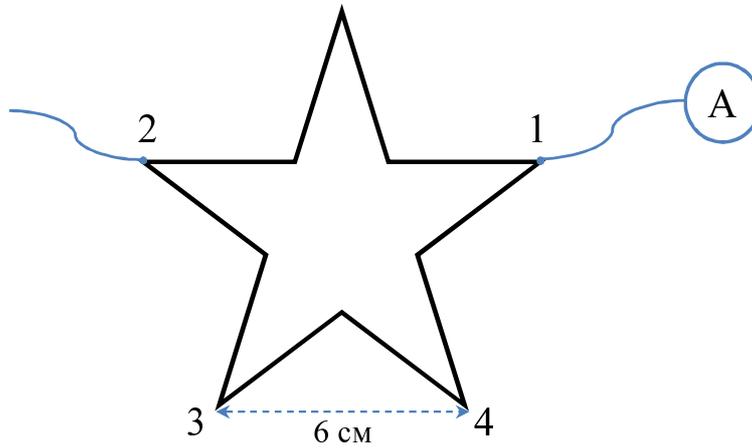


Рис. 5.2. К примеру 5.1

подводя ток силой $I > 0$, и 2) провод подсоединен только к точке 2, подводя ток силой $-I < 0$. Определив нужные нам величины для указанных случаев, затем мы просто используем принцип суперпозиции.

Физические поля в каждом из случаев по отдельности легко найти на основе симметрии. Внутри проводящего полупространства ни одно из направлений, идущих из источника, в данном случае точки 1, не является в рамках принятых допущений более предпочтительным, чем другое. Поэтому плотность тока в проводнике на расстоянии r от источника получается делением тока на площадь полусферы:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi r^2} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (5.9)$$

Здесь единичный вектор \mathbf{e}_r описывает радиальное направление от точки 1. Используя закон Ома в дифференциальной форме $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, получаем напряженность электрического поля

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{I\rho}{2\pi r^2} \mathbf{e}_r, \quad (5.10)$$

где $\rho = \sigma^{-1}$ – удельное электрическое сопротивление. Из уравнения $\nabla\varphi = -\mathbf{E}$, которое сводится к форме

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{I\rho}{2\pi r^2}, \quad (5.11)$$

находим потенциал

$$\varphi(r) = \frac{I\rho}{2\pi r} + \text{const}. \quad (5.12)$$

Разность потенциалов между точками 4 и 3 в первом случае составляет

$$\varphi_4 - \varphi_3 = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right), \quad (5.13)$$

где a – расстояние между смежными вершинами звезды, а b – расстояние между несмежными ее вершинами. Учитывая противоположное направление тока, аналогичным образом записываем потенциал во втором случае, а именно

$$\psi(r') = -\frac{I\rho}{2\pi r'} + \text{const}, \quad (5.14)$$

где r' – расстояние от точки 2. Разность потенциалов между точками 4 и 3 составляет

$$\psi_4 - \psi_3 = -\frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right), \quad (5.15)$$

что совпадает с величиной (5.13).

Суммируя (5.13) и (5.15), получаем показания вольтметра

$$U = \frac{I\rho(b-a)}{\pi ab}. \quad (5.16)$$

Геометрическими рассуждениями находим $b/a = 2 \sin \frac{3\pi}{10} \approx 1,618$, поэтому удельное сопротивление проводника выражается формулой

$$\rho = \frac{\pi abU}{(b-a)I} = \frac{2\pi \sin \frac{3\pi}{10}}{2 \sin \frac{3\pi}{10} - 1} \frac{aU}{I}. \quad (5.17)$$

Подстановка числовых данных $a = 0,06$ м, $I = 10^3$ А и $U = 2 \cdot 10^{-4}$ В дает значение $\rho = 0,099 \cdot 10^{-6}$ Ом·м. По своему электрическому сопротивлению вещество куба напоминает железо.

Пример 5.2. Два цилиндрических проводника радиусом r_0 каждый приварены к плоской металлической пластине толщиной a , как показано на рис. 5.3, причем расстояние между осями проводников равно b . Удельное сопротивление проводников ρ_1 значительно меньше удельного сопротивления материала пластины ρ . Найти сопротивление между проводниками, если $a \ll r_0 \ll b$, а саму пластину можно считать неограниченной.

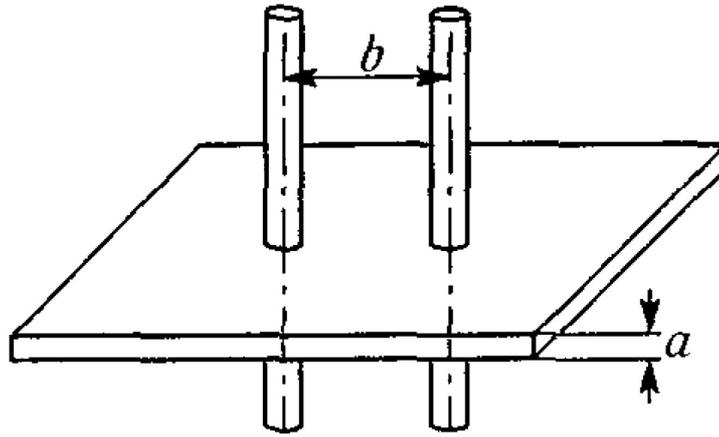


Рис. 5.3. К примеру 5.2

Решение. Снова используем симметрии задачи и принцип суперпозиции. Интересующую нас физическую картину можно получить наложением следующих двух: 1) к пластине приварен только один проводник, скажем левый, который подводит ток силой $I > 0$, и 2) к пластине приварен только правый проводник, который подводит ток силой $-I < 0$. Определив нужные нам величины для каждого из этих случаев, затем мы просто используем принцип суперпозиции.

Физические поля по отдельности можно найти на основе соображений симметрии, выделив в пластине цилиндр высотой a и радиусом r_0 , который подводит или отводит заряд. Ввиду условия $\rho_1 \ll \rho$ распределение заряда в пределах этого цилиндра считаем однородным. В теле тонкой неограниченной пластины ни одно из горизонтальных направлений, идущих из источника заряда, не может быть предпочтительнее другого. Заметим также, что толщина пластины a мала в сравнении с остальными характерными пространственными масштабами. Поэтому плотность тока зависит только от расстояния r до центра источника и получается делением тока на площадь боковой поверхности соответствующего цилиндра:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi r a} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (5.18)$$

С учетом закона Ома в дифференциальной форме выражаем напряжен-

ность электрического поля в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{I\rho}{2\pi r a} \mathbf{e}_r, \quad (5.19)$$

где $\rho = \sigma^{-1}$. Из уравнения $\nabla\varphi = -\mathbf{E}$, которое сводится к форме

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{I\rho}{2\pi r a}, \quad (5.20)$$

для значений $r \geq r_0$ находим потенциал

$$\varphi(r) = \frac{I\rho}{2\pi a} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right). \quad (5.21)$$

Аддитивная константа выбрана так, чтобы потенциал подводящего заряды проводника равнялся нулю. Поскольку $r_0 \ll b$, разность потенциалов определяем для $r = b$, откуда

$$\varphi(r_0) - \varphi(b) = \frac{I\rho}{2\pi a} \ln\left(\frac{b}{r_0}\right). \quad (5.22)$$

Данная разность потенциалов между левым и правым проводниками соответствует первому случаю. Во втором случае зависимость потенциала определяется выражением (5.21) с заменой I на $-I$, причем r означает расстояние вдоль плоскости от центра правого стока. Получается, что во втором случае разность потенциалов между левым и правым проводниками также задается правой частью формулы (5.22). В результате наложения двух картин суммарная разность потенциалов

$$RI = \frac{I\rho}{2\pi a} \ln\left(\frac{b}{r_0}\right) + \frac{I\rho}{2\pi a} \ln\left(\frac{b}{r_0}\right),$$

откуда получаем искомое сопротивление

$$R = \frac{\rho}{\pi a} \ln\left(\frac{b}{r_0}\right). \quad (5.23)$$

Пример 5.3. Длинный медный провод радиуса a протянут в глубокое озеро на высоте h над плоским дном. Считая дно очень хорошим проводником, найти электрическое сопротивление между ним и проводом, отнесенное к единице длины провода. Удельная проводимость озерной воды σ известна.

Решение. Закон преломления силовых линий на плоской границе между водой и дном описывается формулой (5.7), которая в случае

$\sigma \ll \sigma'$ дает $\theta \ll \theta'$. Иными словами, можно принять, что вблизи дна силовые линии подходят к нему вертикально. Тогда распределение электрического поля в озере легко найти методом изображений, в котором полуплоскость под дном заменяется водой и на расстоянии h ниже границы протягивается такой же медный провод с током равной величины и противоположного направления. Зная, что одиночный прямой провод создает в неограниченной среде аксиально симметричное поле, мы записываем соответствующие потенциалы для последующего наложения полей от двух проводов согласно принципу суперпозиции.

Пусть по одиночному проводу радиуса a течет ток силой I . Выбрав ось провода в качестве начала отсчета, плотность тока запишем в виде:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi r \ell} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (5.24)$$

Здесь r – радиус в полярной системе координат, ℓ – длина провода, а выражение $2\pi r \ell$ есть площадь боковой поверхности, через которую расходится ток. Согласно закону Ома в дифференциальной форме, напряженность электрического поля задается формулой

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi\sigma\ell} \frac{\mathbf{e}_r}{r}. \quad (5.25)$$

Уравнение $\nabla\varphi = -\mathbf{E}$ сводится в данном случае к форме

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{I}{2\pi\sigma\ell} \frac{1}{r}. \quad (5.26)$$

Интегрируя его с учетом $\varphi(a) = 0$, находим потенциал электрического поля реального провода

$$\varphi(r) = \frac{I}{2\pi\sigma\ell} \ln\left(\frac{a}{r}\right), \quad (5.27)$$

где $r \geq a$. Заменяя в этом выражении I на $-I$ и r на r' , записываем потенциал поля воображаемого провода.

В результате наложения полей мы имеем электростатический потенциал

$$\psi(r, r') = \frac{I}{2\pi\sigma\ell} \ln\left(\frac{r'}{r}\right), \quad (5.28)$$

где r' и r – измеренные в вертикальной плоскости расстояния от точки наблюдения до центров воображаемого и реального проводов соответственно. На плоской границе между областями потенциал $\psi_1 = 0$ в

силу $r' = r$. Подставляя $r = a$ и $r' = 2h$, причем последнее допустимо при $a \ll h$, находим итоговый потенциал на поверхности реального провода

$$\psi_2 = \frac{I}{2\pi\sigma\ell} \ln\left(\frac{2h}{a}\right). \quad (5.29)$$

Разность потенциалов $\psi_2 - \psi_1$ также определяется правой частью уравнения (5.29). Разделив ее на силу тока I , получаем сопротивление среды между проводом и дном, а после умножения на ℓ – искомое сопротивление, отнесенное к единице длины провода, т. е.

$$\frac{1}{2\pi\sigma} \ln\left(\frac{2h}{a}\right). \quad (5.30)$$

Разумеется, полученные формулы справедливы только при $a \ll h \ll \ell$.

Пример 5.4. Определить количество энергии, поглощаемой в единицу времени веществом с удельным сопротивлением $\rho = 10^9$ Ом·м, которое заполняет пространство между двумя высокопроводящими сферическими оболочками с радиусами $a_1 = 1$ см и $a_2 = 2$ см, между которыми поддерживается разность потенциалов 10 кВ.

Решение. Поскольку задача характеризуется сферической симметрией, общий центр сферических оболочек служит началом координат. Тогда вектор плотности электрического тока направлен вдоль \mathbf{r} , а его модуль имеет вид

$$j = \frac{I}{4\pi r^2}, \quad (5.31)$$

где I – полный ток между оболочками. Используя закон Ома в дифференциальной форме и уравнение $\nabla\varphi = -\mathbf{E}$, для потенциала записываем:

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{I\rho}{4\pi r^2}, \quad \varphi(r) = \frac{I\rho}{4\pi r} + \text{const}.$$

Разность потенциалов между сферическими оболочками выражается соотношением

$$U = \varphi(a_1) - \varphi(a_2) = \frac{I\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right). \quad (5.32)$$

Согласно (5.8) мощность тепловыделения в единице объема описывается формулой $w(r) = \rho j^2$ с плотностью тока (5.31). Интегрируя $w(r)$ по области между двумя сферами, находим суммарную мощность

$$W = \int d\Omega \int_{a_1}^{a_2} w(r)r^2 dr = \frac{I^2\rho}{4\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{I^2\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right). \quad (5.33)$$

Совместно уравнения (5.32) и (5.33) дают окончательное выражение

$$W = \frac{4\pi U^2}{\rho} \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} .$$

В результате подстановки числовых данных получаем мощность тепло-выделения $W \approx 0,025$ Вт.

Задача 5.1. Что получится, если в условиях примера 4.1 звезду заменить на прямоугольник со сторонами a и b , пропускать ток через одну из сторон и измерять напряжение между вершинами противоположащей стороны?

Задача 5.2. Сферический электрод радиуса a помещен в среду с удельной проводимостью σ на расстоянии $d \gg a$ от большой плоской пластины с очень высокой проводимостью. Найти сопротивление между сферой и пластиной.

Задача 5.3. Определить сопротивление изоляции на единицу длины провода диаметром d_2 с внутренним проводником диаметром d_1 и наружным слоем изоляции с удельным сопротивлением ρ .

Задача 5.4. Найти мощность тепловыделения на единицу длины полой трубки между двумя коаксиальными цилиндрическими оболочками с радиусами a_1 и a_2 , между которыми поддерживается разность потенциалов U , если удельное сопротивление материала, из которого изготовлена трубка, равно ρ .

§ 6. Двумерные задачи и комплексный потенциал

Многие задачи о токах в проводниках являются двумерными, поскольку ток можно сосредоточить в конечной области, ограничивая ее изолирующей поверхностью. К этому типу принадлежат, например, задачи о токах в тонких плоских проводящих пленках. Эффективно двумерными являются и такие пространственные задачи, в которых трубки тока параллельны одной плоскости, скажем, плоскости xOy , и отсутствует зависимость полей и токов от третьей декартовой координаты. Во избежание недоразумений подчеркнем, что в данном параграфе z обозначает комплексное переменное. Конформные отображения широко используются при расчете плоских электростатических полей. Ввиду отмеченной выше аналогии данный математический аппарат применим и в теории постоянных токов. Вещественная $u(x, y)$ и мнимая $v(x, y)$ части аналитической функции $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ удовлетворяют условиям Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (6.1)$$

Отсюда следует, что каждая из функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ является *гармонической*, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (6.2)$$

Две гармонические функции, связанные между собой условиями (6.1), называются *сопряженными* друг другу. Взаимно однозначное отображение одной области плоскости на другую называется *конформным*, когда оно сохраняет углы между кривыми. Можно показать, что аналитическая функция $w(z)$ задает конформное отображение любой односвязной области, в которой $w'(z) \neq 0$. Еще одно замечательное свойство заключается в том, что при таком отображении гармонические функции преобразуются в гармонические же функции.

Действительно, пусть $F(x, y)$ – некоторая гармоническая функция, определенная внутри области D_z , а функция $\omega(z)$ отображает область D_z комплексной плоскости z на область D_w комплексной плоскости w . В результате получаем функцию $G(u, v) = F(x(u, v), y(u, v))$ новых переменных. Последовательным дифференцированием находим:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (6.4)$$

и, после соответствующих преобразований,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Сумма выражений (6.5) и (6.6) не содержит первых производных функции $G(u, v)$ в силу того, что $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются гармоническими функциями. Величина $2(\partial^2 G / \partial u \partial v)$ входит с множителем

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

который равен нулю благодаря условиям Коши – Римана (6.1). Замечая, что

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = i \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

окончательно получаем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = |\omega'(z)|^2 \left(\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} \right). \quad (6.7)$$

При условии $\omega'(z) \neq 0$ гармоническая в области D_z функция $F(x, y)$ переходит в функцию $G(u, v)$, гармоническую в области D_w . Иными словами, уравнение Лапласа остается инвариантным при конформных отображениях.

Задача о нахождении плоского электростатического поля сводится к решению двухмерного уравнения Лапласа при заданных краевых условиях. Например, на границах области может быть задан электростатический потенциал, т. е. значения самой искомой функции, или ток по направлению нормали к границе, что означает задание нормальной производной потенциала. Пусть действительная часть $u(x, y)$ комплексной функции $w(z)$ подобрана таким образом, что уравнение $u(x, y) = \text{const}$ описывает поверхность металлического электрода. Тогда эта функция будет представлять собой электростатический потенциал в окружающем диэлектрике. Из условий Коши – Римана (6.1) следует, что поверхности $v(x, y) = \text{const}$ ортогональны к эквипотенциальным поверхностям $u(x, y) = \text{const}$. Иными словами, линии тока принадлежат поверхностям вида $v(x, y) = \text{const}$. Аналитическую функцию $w(z)$ принято называть *комплексным потенциалом*. Конечно, в качестве электростатического потенциала можно было бы использовать мнимую часть комплексного потенциала с эквипотенциальными поверхностями $v(x, y) = \text{const}$. Тогда уравнения вида $u(x, y) = \text{const}$ описывают силовые линии.

Пример 6.1. В примере 5.2 было показано, что одиночный провод создает аксиально-симметричное поле с электростатическим потенциалом

$$\propto \ln r = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2). \quad (6.8)$$

Найти комплексный потенциал, вещественная часть которого равна правой части (6.8).

Решение. Принимая $u(x, y) = (1/2) \ln(x^2 + y^2)$, из условий Коши – Римана (6.1) находим уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad (6.9)$$

Интегрируя (6.9), с точностью до аддитивной константы получаем

$$v(x, y) = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right). \quad (6.10)$$

В терминах комплексного переменного $z = x + iy$ записываем:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \arg z = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Для главной ветви логарифма имеет место формула

$$\ln C = \ln |C| + i \arg C, \quad (6.11)$$

поэтому комплексный потенциал выражается соотношением

$$\omega(z) = \ln |z| + i \arg z = \ln z. \quad (6.12)$$

Если ось аксиально-симметричного поля проходит через точку (x_0, y_0) вместо начала координат, то используется комплексный потенциал, пропорциональный $\ln(z - z_0)$, где $z_0 = x_0 + iy_0$.

Пример 6.2. Исследовать характер конформного отображения, заданного функцией

$$\omega(z) = \exp(z). \quad (6.13)$$

Фактически это отображение является обратным по отношению к (6.12), но из двух функций выражение (6.13) удобнее для анализа, нежели многозначный логарифм.

Решение. Функция (6.13) задает конформное всюду отображение, поскольку ее производная отлична от нуля во всех точках плоскости z . Рассмотрим прямоугольную сетку на плоскости z , состоящую из линий вида $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$. На прямой $x = x_1$ при изменяющемся y имеем

$$\omega = \exp(x_1) \exp(iy),$$

так что $|\omega| = \exp(x_1) = \text{const}$, а угол $\arg \omega$ пробегает все значения. Таким образом, прямая $x = \text{const}$ плоскости z отображается в окружность, лежащую на плоскости ω . На прямой $y = y_1$ при изменяющемся x записываем

$$\omega = \exp(x) \exp(iy_1),$$

так что $\arg \omega = y_1 = \text{const}$, а модуль $|\omega|$ принимает любое положительное значение. Иными словами, прямая $y = \text{const}$ плоскости z отображается в исходящий из начала координат луч на плоскости ω . Исходная и преобразованная сетки из таких линий показаны на рис. 6.1.

Конформное отображение, заданное функцией (6.13), интересно еще по одной причине. Для любого целого k выполняется равенство

$$\omega(z + i2\pi k) = \omega(z). \quad (6.14)$$

В результате такой периодичности обратная функция многозначна. Чтобы получить все возможные значения функции, на исходной плоскости достаточно оставить только одну полосу, скажем $|y| \leq \pi$. В частности,

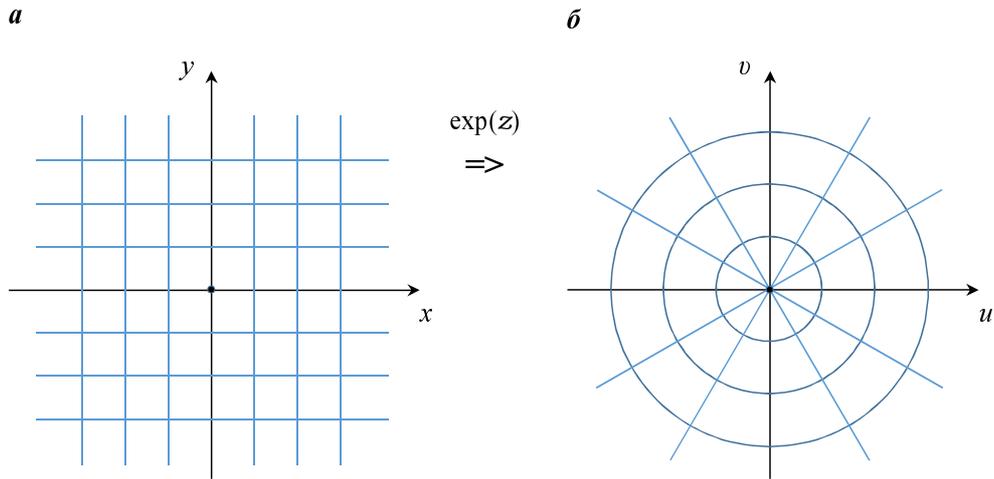


Рис. 6.1. Конформное отображение, заданное функцией $z \mapsto \exp(z)$: *a* – исходная сетка; *б* – преобразованная сетка в примере 6.2

полоса $0 \leq y \leq \pi$ покрывает при отображении (6.13) всю верхнюю полу-плоскость $v = \text{Im } w \geq 0$. В самом деле, прямая линия $y = 0$ переходит в луч $\arg w = 0$, а прямая линия $y = \pi$ переходит в луч $\arg w = \pi$. Кроме того, точка $z = i\pi/2$ полосы отображается в точку $w = i$ верхней полуплоскости. Итак, если ввести две области:

$$\mathcal{D}_z = \left\{ (x, y) : -\infty < x < +\infty, 0 \leq y \leq \pi \right\}, \quad (6.15)$$

$$\mathcal{D}_w = \left\{ (u, v) : -\infty < u < +\infty, 0 \leq v < +\infty \right\}, \quad (6.16)$$

то при отображении (6.13) функция, гармоническая в области \mathcal{D}_z , переходит в функцию, гармоническую в области \mathcal{D}_w . Ниже даны примеры, в которых это отображение используется для нахождения постоянных электрических полей или сопротивлений.

Пример 6.3. Найти электростатический потенциал поля, создаваемого проводом малого радиуса в слое между двумя параллельными проводящими заземленными пластинами.

Решение. Рассмотрим слой материала с удельным сопротивлением ρ между плоскостями $y = 0$ и $y = \rho$, показанный на рис. 6.2, *a*. Через I обозначим величину электрического тока на единицу длины провода, идущего перпендикулярно плоскости xOy . Методом изображений нетрудно найти электростатический потенциал в случае провода,

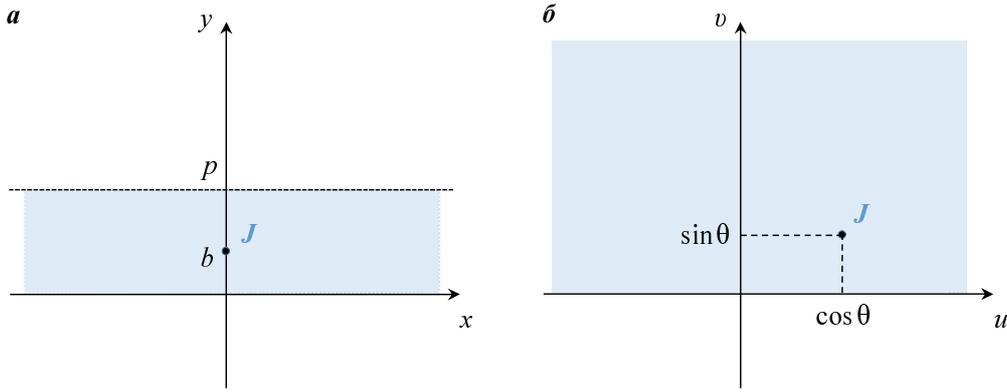


Рис. 6.2. К примеру 6.3: *a* – слой материала между плоскостями $y = 0$ и $y = p$; *б* – задача в полуплоскости после отображения (6.17)

проходящего над параллельной ему проводящей плоскостью. Используем конформное отображение, чтобы связать полуплоскость $v = \text{Im } w \geq 0$ и полосу $0 \leq y \leq p$. Зная потенциал, создаваемый проводом в полуплоскости, мы найдем искомое выражение для потенциала в полосе. Отображение из примера 6.2 перепишем в виде

$$w = \exp\left(\frac{\pi z}{p}\right), \quad (6.17)$$

так что линия $z = x + ip$ переходит в луч $\arg w = \pi$. Идущему через точку с абсциссой $x = 0$ и ординатой $y = b$ проводу на комплексной плоскости w ставится в соответствие точка $\exp(i\theta)$, причем $0 < b < p$ и $\theta = \pi b/p$ (см. рис. 6.2, б).

Для провода, проходящего через точку $(\cos \theta, \sin \theta)$, комплексный потенциал в полуплоскости $\text{Im } w \geq 0$ имеет вид

$$G(u, v) = \frac{J\rho}{2\pi} \ln\left(\frac{w - \exp(-i\theta)}{w - \exp(i\theta)}\right) + \text{const}. \quad (6.18)$$

Он получен методом изображений, согласно которому токи $\pm J$ проходят через точки $(\cos \theta, \pm \sin \theta)$ соответственно. На прямой $v = 0$ вещественная часть входящего в (6.18) логарифма действительно равна нулю. В результате подстановки (6.17) получаем комплексный потенциал

$$F(x, y) = \frac{J\rho}{2\pi} \ln\left(\frac{\exp(\pi z/p) - \exp(-i\theta)}{\exp(\pi z/p) - \exp(i\theta)}\right) + \text{const}. \quad (6.19)$$

Осталось преобразовать полученное выражение и выделить его вещественную часть. В силу формулы (6.11) нужно получить величины

$$|\exp(\pi z/p) - \exp(\pm i\theta)|.$$

Обозначая в целях краткости $\alpha = \pi x/p$ и $\beta = \pi y/p$, записываем для модулей в квадрате выражения

$$\begin{aligned} & |e^\alpha(\cos \beta + i \sin \beta) - (\cos \theta \pm i \sin \theta)|^2 = \\ & = (e^\alpha \cos \beta - \cos \theta)^2 + (e^\alpha \sin \beta \mp \sin \theta)^2 = \\ & = e^{2\alpha} + 1 - 2e^\alpha(\cos \beta \cos \theta \pm \sin \beta \sin \theta) = \\ & = 2e^\alpha(\operatorname{ch} \alpha - \cos(\beta \mp \theta)). \end{aligned} \quad (6.20)$$

С учетом (6.20) вещественная часть (6.19) принимает окончательный вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(x, y) = & \frac{J\rho}{4\pi} \ln \left\{ \operatorname{ch} \left(\frac{\pi x}{p} \right) - \cos \frac{\pi(y+b)}{p} \right\} - \\ & - \frac{J\rho}{4\pi} \ln \left\{ \operatorname{ch} \left(\frac{\pi x}{p} \right) - \cos \frac{\pi(y-b)}{p} \right\} + \operatorname{const}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Это и есть искомый электростатический потенциал.

Пример 6.4. Найти гармоническую функцию, сопряженную к электростатическому потенциалу из примера 6.3.

Решение. Следует выразить мнимую часть комплексного потенциала (6.19). С учетом формулы (6.11) запишем сначала аргументы комплексных величин

$$\exp(\pi z/p) - \exp(\pm i\theta) = e^\alpha \cos \beta - \cos \theta + i(e^\alpha \sin \beta \mp \sin \theta),$$

а именно

$$\arg(\exp(\pi z/p) - \exp(\pm i\theta)) = \operatorname{arctg} \left(\frac{e^\alpha \sin \beta \mp \sin \theta}{e^\alpha \cos \beta - \cos \theta} \right). \quad (6.22)$$

Подставляя эти выражения в (6.19), находим

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} F(x, y) = & \frac{J\rho}{2\pi} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\exp(\pi x/p) \sin(\pi y/p) + \sin(\pi b/p)}{\exp(\pi x/p) \cos(\pi y/p) - \cos(\pi b/p)} \right\} - \\ & - \frac{J\rho}{2\pi} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\exp(\pi x/p) \sin(\pi y/p) - \sin(\pi b/p)}{\exp(\pi x/p) \cos(\pi y/p) - \cos(\pi b/p)} \right\} + \operatorname{const}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Эта гармоническая функция является сопряженной к электростатическому потенциалу (6.21).

Пример 6.5. Исходя из формулы (6.21), проанализировать распределение потенциала в непосредственной близости от провода.

Решение. Вблизи точки $(0, b)$ запишем $x \sim \varepsilon$ и $y - b = \Delta y \sim \varepsilon$. Используя общеизвестные разложения, получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{p}\right) - \cos \frac{\pi(y-b)}{p} &= 1 + \frac{\pi^2 x^2}{2p^2} - 1 + \frac{\pi^2 \Delta y^2}{2p^2} + O(\varepsilon^4) = \\ &= \frac{\pi^2 r^2}{2p^2} + O(\varepsilon^4), \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{p}\right) - \cos \frac{\pi(y+b)}{p} &= 1 - \cos \frac{2\pi b}{p} + \sin \frac{2\pi b}{p} \Delta y + O(\varepsilon^2) = \\ &= 2 \sin^2 \frac{\pi b}{p} + \sin \frac{2\pi b}{p} \Delta y + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (6.25)$$

где для краткости $r^2 = x^2 + \Delta y^2 \sim \varepsilon^2$. При $\varepsilon \rightarrow +0$ логарифм выражения (6.24) ведет себя как

$$\ln \left\{ \operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{p}\right) - \cos \frac{\pi(y-b)}{p} \right\} = \ln \left(\frac{\pi^2 r^2}{2p^2} \right) + \dots \sim 2 \ln \varepsilon + O(1), \quad (6.26)$$

т. е. неограниченно возрастает по абсолютной величине. При расположении электрода строго внутри ленты $\sin(\pi b/p) > 0$, так что правая часть (6.25) принимает вид

$$\ln \left\{ \operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{p}\right) - \cos \frac{\pi(y+b)}{p} \right\} = \ln 2 + 2 \ln \left(\sin \frac{\pi b}{p} \right) + O(\varepsilon).$$

Эта величина мала по сравнению с функцией (6.26), которая и доминирует в окрестности провода. Таким образом, вблизи источника электростатический потенциал описывается выражением

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &\approx \frac{J\rho}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) + \text{const}, \\ r^2 &= x^2 + (y-b)^2, \end{aligned} \quad (6.27)$$

которое получается подстановкой (6.24) в (6.21). Если принять $J = I/a$, то правая часть (6.27) совпадает с потенциалом (5.21), который был получен для аксиально-симметричного распространения тока в неограниченной пластине толщиной a . Иными словами, в непосредственной близости от провода малого радиуса потенциал распределен так, как если бы поперечный размер $p \rightarrow \infty$. Плотность тока описывается формулой

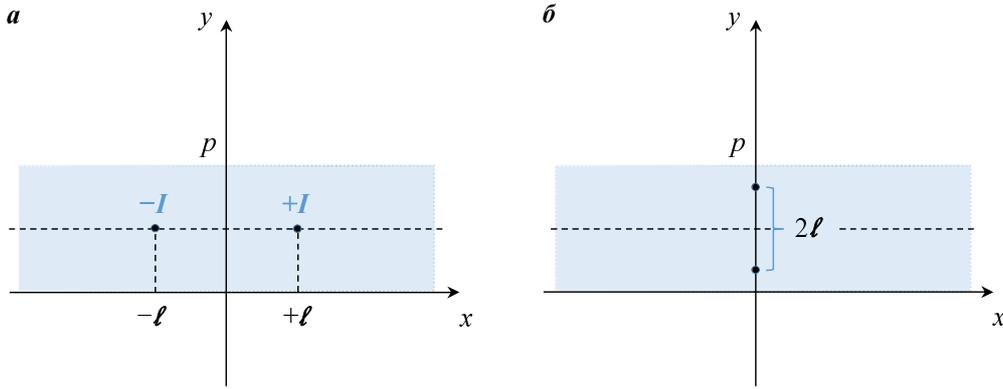


Рис. 6.3. Схема подключения электродов к ленте шириной p : a – в примерах 6.6 и 6.8; b – в задаче 6.4

(5.18) как результат равномерного распределения по площади боковой поверхности цилиндра радиусом r .

Пример 6.6. Найти сопротивление между электродами малого радиуса r_0 , разнесенными на расстояние 2ℓ вдоль средней линии бесконечной ленты между полосами из идеального проводника (рис. 6.3, a). Лента шириной p и толщиной $a \ll p$ изготовлена из материала с удельным сопротивлением ρ .

Решение. Пусть электроды касаются ленты в точках с абсциссами $x = \pm\ell$ и ординатой $y = p/2$, как показано на рис. 6.3, a . Найдем разность потенциалов в ситуации, когда ток $I = Ja$ подводится через электрод в точке $(+\ell, p/2)$. Принимая константу в (6.21) равной нулю, для малого радиуса r_0 записываем потенциал на поверхности такого электрода в виде

$$\varphi_1 = \frac{J\rho}{4\pi} \ln\left(\frac{2p^2}{\pi^2 r_0^2}\right) + \frac{J\rho}{4\pi} \ln 2 = \frac{J\rho}{2\pi} \ln\left(\frac{2p}{\pi r_0}\right). \quad (6.28)$$

Здесь учтены первые слагаемые в правых частях (6.24) и (6.25) с подстановкой $\sin(\pi b/p) = 1$ для $b = p/2$. При вычислении значения потенциала на поверхности второго электрода заменяем x на разность ординат 2ℓ и подставляем $y = b = p/2$, откуда:

$$\cos \frac{\pi(y-b)}{p} = 1, \quad \cos \frac{\pi(y+b)}{p} = -1.$$

Взятый со знаком минус потенциал на поверхности второго провода равен выражается формулой

$$-\varphi_2 = \frac{J\rho}{4\pi} \ln \left\{ \frac{\operatorname{ch}(2\pi\ell/p) - 1}{\operatorname{ch}(2\pi\ell/p) + 1} \right\} = \frac{J\rho}{2\pi} \ln \left\{ \operatorname{th} \left(\frac{\pi\ell}{p} \right) \right\}, \quad (6.29)$$

где мы пренебрегли влиянием поперечных размеров и учли тождество

$$\frac{\operatorname{ch} 2\xi - 1}{\operatorname{ch} 2\xi + 1} = \operatorname{th}^2 \xi.$$

Поэтому в результате подведения тока I к первому электроду разность потенциалов записывается в виде

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{I\rho}{2\pi a} \ln \left(\frac{2p \operatorname{th}(\pi\ell/p)}{\pi r_0} \right). \quad (6.30)$$

Можно проверить, что такая же разность потенциалов создается при отведении тока величиной I через электрод в точке $(-\ell, p/2)$. Похожая ситуация уже возникала в примере 5.2. Делением удвоенной величины (6.30) на протекающий по ленте ток I находим искомое сопротивление

$$R = \frac{\rho}{\pi a} \ln \left(\frac{2p \operatorname{th}(\pi\ell/p)}{\pi r_0} \right). \quad (6.31)$$

Пример 6.7. Найти электростатический потенциал поля, создаваемого проводом малого радиуса в слое между двумя параллельными изолирующими пластинами.

Решение. Возьмем слой материала с удельным сопротивлением ρ между изолирующими плоскостями $y = 0$ и $y = p$. Как и в примере 6.3, через J обозначим величину электрического тока на единицу длины провода, идущего перпендикулярно плоскости xOy . Руководствуясь методом изображений, согласно которому токи J идут через точки $(\cos \theta, \pm \sin \theta)$, записываем комплексный потенциал

$$G(u, v) = -\frac{J\rho}{2\pi} \ln(\omega - \exp(i\theta)) - \frac{J\rho}{2\pi} \ln(\omega - \exp(-i\theta)) + \operatorname{const}. \quad (6.32)$$

Вещественная часть (6.32) дает электростатический потенциал поля, создаваемого током J над изолирующей плоскостью $v = 0$. В результате конформного отображения (6.17) комплексный потенциал (6.32) переходит, с точностью до аддитивной константы, в функцию

$$F(x, y) = -\frac{J\rho}{2\pi} \ln \left\{ (\exp(\pi z/p) - \exp(i\theta)) (\exp(\pi z/p) - \exp(-i\theta)) \right\}.$$

Записывая вещественную часть этой функции с помощью (6.20), вместо (6.21) получаем электростатический потенциал

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(x, y) = & -\frac{J\rho}{4\pi} \ln \left\{ \operatorname{ch} \left(\frac{\pi x}{p} \right) - \cos \frac{\pi(y-b)}{p} \right\} - \\ & -\frac{J\rho}{4\pi} \ln \left\{ \operatorname{ch} \left(\frac{\pi x}{p} \right) - \cos \frac{\pi(y+b)}{p} \right\} + \operatorname{const}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Примечательно, что потенциалы (6.21) и (6.33) различаются лишь знаком перед одним из двух логарифмов.

Пример 6.8. Найти сопротивление между электродами из примера 6.6, если вместо проводящих полос лента окружена изолирующими.

Решение. Аналогично примеру 6.6 рассмотрим наложение двух распределений, в первом из которых ток I подводится через электрод в точке $(+\ell, p/2)$, а во втором такой же ток отводится через электрод в точке $(-\ell, p/2)$. Поскольку выражение (6.33) отличается от (6.21) только знаком перед одним из логарифмов, можно использовать полученные ранее выражения. Пусть ток $I = Ja$ подведен к электроду с центром в точке $(+\ell, p/2)$. В случае малого радиуса r_0 потенциал на поверхности этого электрода описывается выражением

$$\varphi_1 = \frac{J\rho}{4\pi} \ln \left(\frac{2p^2}{\pi^2 r_0^2} \right) - \frac{J\rho}{4\pi} \ln 2 = \frac{J\rho}{2\pi} \ln \left(\frac{p}{\pi r_0} \right), \quad (6.34)$$

которое отличается от (6.28) знаком минус в промежуточном выражении. Аналогичным образом поступим с формулой (6.29), в результате чего взятый со знаком минус потенциал на поверхности второго электрода имеет вид

$$-\varphi_2 = \frac{I\rho}{4\pi a} \ln \left\{ \operatorname{ch}^2 \left(\frac{2\pi\ell}{p} \right) - 1 \right\} = \frac{I\rho}{2\pi a} \ln \left\{ \operatorname{sh} \left(\frac{2\pi\ell}{p} \right) \right\}. \quad (6.35)$$

На последнем шаге использовано тождество $\operatorname{ch}^2 \xi - \operatorname{sh}^2 \xi = 1$ для гиперболических косинуса и синуса. Итак, подведение тока I через первый электрод дает разность потенциалов, которая выражается формулой

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{I\rho}{2\pi a} \ln \left(\frac{p \operatorname{sh}(2\pi\ell/p)}{\pi r_0} \right). \quad (6.36)$$

Нетрудно проверить, что такая же разность потенциалов создается и при отведении тока величиной I через электрод, расположенный в точке $(-\ell, p/2)$. Делением удвоенной величины (6.36) на протекающий по

ленте ток I находим искомое сопротивление

$$R = \frac{\rho}{\pi a} \ln \left(\frac{\rho \operatorname{sh}(2\pi\ell/\rho)}{\pi r_0} \right). \quad (6.37)$$

Полученным выражением можно пользоваться только при $r_0 \ll a \ll \rho$.

Задача 6.1. Записав вещественную и мнимую части комплексного потенциала $w = z$, изобразить линии $u(x, y) = \operatorname{const}$ и $v(x, y) = \operatorname{const}$ на комплексной плоскости и дать им физическую интерпретацию. Какому электрическому полю соответствует получившаяся картина?

Задача 6.2. Проверить, что взаимно сопряженные функции (6.21) и (6.23) удовлетворяют условиям Коши – Римана (6.1). Для сокращения записи формул рекомендуется принять $\rho = \pi$.

Задача 6.3. Найти гармоническую функцию, сопряженную к электростатическому потенциалу из примера 6.7.

Задача 6.4. Пусть в примере 6.8 электроды расположены симметрично на линии, перпендикулярной к краям ленты, так что отстояние каждого электрода от середины ленты равно ℓ (см. рис. 6.3, б). Показать, что в этом случае сопротивление между электродами описывается формулой

$$R = \frac{\rho}{\pi a} \ln \left(\frac{2\rho \operatorname{tg}(\pi\ell/\rho)}{\pi r_0} \right).$$

§ 7. Разделение переменных в двумерных задачах

Метод разделения переменных является одним из наиболее эффективных методов математической физики. Даже в случае сравнительно простых областей на плоскости отыскание заранее неизвестных параметров соответствующего конформного отображения может оказаться проблематичным. При разделении переменных искомая функция строится в виде разложения в ряд или интеграл по определенным системам специально подобранных функций. Обсудим идею метода разделения переменных применительно к уравнению Лапласа на плоскости в декартовых координатах. Этого достаточно для рассмотрения задач в прямоугольных областях. Конечно, область применимости метода разделения переменных включает пространственные задачи, описание нестационарных процессов и т.д. Разделение переменных можно производить и в ортогональных криволинейных координатах, но при этом приходится использовать так называемые специальные функции, обсуждение которых выходит за рамки данного пособия.

Рассмотрим кратко основную идею метода разделения переменных применительно к уравнению Лапласа на плоскости, а именно

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (7.1)$$

Разумеется, нас не интересует решение, тождественно равное нулю. Можно попытаться записать искомую функцию в виде произведения

$$X(x)Y(y), \quad (7.2)$$

где $X(x)$ и $Y(y)$ – неизвестные пока функции одной координаты. После подстановки (7.2) в уравнение (7.1) и деления на $X(x)Y(y)$ получаем

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0. \quad (7.3)$$

Левая часть этого уравнения является суммой двух дробей, первая из которых зависит только от x , а вторая – только от y . Равенство (7.3) может выполняться лишь в том случае, когда обе эти дроби являются константами, в данном случае одной величины и разного знака. Эта величина определяется наложенными граничными условиями, отражающими физическое существо задачи. Пусть, к примеру, на линиях вида $x = \text{const}$ область, в которой разыскивается потенциал, граничит с проводником. Тогда можно принять, что электростатический потенциал здесь зануляется, т. е.:

$$\varphi|_{x=0} = 0, \quad \varphi|_{x=p} = 0, \quad (7.4)$$

где p – ширина области по оси x . Задача, в которой искомая функция должна принимать на границе области заданные значения, называется *задачей Дирихле*. Нетрудно убедиться в том, что для исчезновения на краях интервала поведение функции должно быть осциллирующим, поэтому

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 < 0. \quad (7.5)$$

Тем самым мы получаем краевую задачу:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad (7.6)$$

$$X(0) = 0, \quad X(p) = 0. \quad (7.7)$$

Примечательно, что нетривиальные решения этой задачи существуют только при $\lambda_n = \pi n/p$, где $n = 1, 2, \dots$, и имеют вид

$$X_n(x) \propto \sin \lambda_n x = \sin \frac{\pi n x}{p}. \quad (7.8)$$

Отрицательные n исключаются из рассмотрения, поскольку, с точностью до знака, дают тот же набор синусов. Знак пропорциональности фигурирует ввиду того, что иногда удобно включить в определение собственных функций задачи нормировочный множитель. Для функций этого набора имеют место соотношения ортогональности

$$\int_0^p \sin \frac{\pi k x}{p} \sin \frac{\pi n x}{p} dx = 0 \quad (k \neq n), \quad (7.9)$$

причем

$$\int_0^p \sin^2 \frac{\pi n x}{p} dx = \frac{p}{2}. \quad (7.10)$$

Случай равного нулю n не рассматривается, так как подстановка этого значения в (7.8) дает тождественно равную нулю функцию.

Если область граничит с изолятором, то нормальная к границе компонента плотности тока равна нулю. Вместе с законом Ома в дифференциальной форме это дает условия вида:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=p} = 0. \quad (7.11)$$

Задача, в которой на границе области задана нормальная производная искомой функции, называется *задачей Неймана*. Тем самым получается краевая задача:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad (7.12)$$

$$X'(0) = 0, \quad X'(p) = 0. \quad (7.13)$$

Она имеет нетривиальные решения при $\lambda_n = \pi n/p$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, а сами решения записываются в виде

$$X_n(x) \propto \cos \lambda_n x = \cos \frac{\pi n x}{p}. \quad (7.14)$$

Случай $n = 0$ отвечает собственной моде при отсутствии зависимости от x . Снова выполняются соотношения ортогональности

$$\int_0^p \cos \frac{\pi k x}{p} \cos \frac{\pi n x}{p} dx = 0 \quad (k \neq n), \quad (7.15)$$

причем:

$$\int_0^p dx = p, \quad \int_0^p \cos^2 \frac{\pi n x}{p} dx = \frac{p}{2}. \quad (7.16)$$

Эти формулы проверяются элементарным интегрированием.

В случае иных граничных условий изменяются как собственные значения, так и соответствующие им функции. Так, ниже рассматривается пример, в котором одна из границ области контактирует с проводником, а другая – с изолятором. На этих границах зануляется сам потенциал или его производная по нормали соответственно. Но область применимости метода разделения переменных значительно шире. Скажем, на границе между двумя проводящими средами должно выполняться условие (5.6), приводящее к тому, что нормальная производная электростатического потенциала претерпевает «скачок». В общем случае собственные значения и собственные функции краевой задачи не

выражаются столь же просто, как в рассмотренных выше примерах. Но искомая функция всегда разыскивается в форме разложения

$$\varphi(x, y) = \sum_n X_n(x)Y_n(y). \quad (7.17)$$

Эту сумму следует использовать вместо одного произведения (7.2). Область суммирования не указана, поскольку она определяется граничными условиями и соответствующими собственными функциями. Если необходимо решить неоднородное уравнение, когда в правой части (7.1) фигурирует функция $g(x, y)$, то последнюю тоже следует представить в виде разложения по собственным функциям задачи. Это осуществляется благодаря соотношениям ортогональности типа (7.9) или (7.15). Например, при использовании набора функций (7.8) записываем сумму

$$g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) \sin \lambda_n x, \quad (7.18)$$

в которой коэффициенты разложения вычисляются по формуле

$$c_n(y) = \frac{2}{p} \int_0^p g(x, y) \sin \lambda_n x \, dx,$$

где мы использовали (7.9) и (7.10). Как известно, аналогичным образом получают коэффициенты разложения функции в ряд Фурье.

Наиболее простыми с точки зрения построения решения и в то же время сохраняющими интерес для практики являются задачи, в которых поперечными размерами источников можно пренебречь. Дельта-функцию Дирака удобно использовать для того, чтобы избежать вычисления интегралов по малой области с последующим устремлением ее характерного размера к нулю. Неформальное определение гласит, что $\delta(x) = 0$ для всех $x \neq 0$, но при этом для всякой «обычной» функции $f(x)$ справедливо равенство

$$\int \delta(x) f(x) \, dx = f(0) \quad (7.19)$$

при условии, что точка $x = 0$ лежит между пределами интегрирования. С математической точки зрения дельта-функция $\delta(x)$ является сингулярной обобщенной функцией, а физически ее можно интерпретировать как плотность распределения в пределе точечного источника. Локализованный в точке (x_0, y_0) плоскости источник какой-либо физической величины будет представлен как произведение этой величины на

$\delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$. В конечном счете все дельта-функции должны оказаться под знаком интеграла и только проинтегрированные выражения имеют непосредственный физический смысл. В дальнейшем техника работы с дельта-функциями будет проиллюстрирована на примерах.

Представим себе, что к пластине толщиной a через электрод малого радиуса в точке (x_0, y_0) подводится ток величиной I . Подобно тому, как мы это делали в примере 5.2, электрод рассматривается как идеальный проводник, тогда как материал пластины имеет удельное сопротивление ρ . При интегрировании по любой области \mathcal{D} пластины, которая не охватывает электрод, получаем

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) dx dy = 0 \quad (7.20)$$

в силу уравнения (5.3). С другой стороны, из уравнения (5.20) следует, что напряженность поля на поверхности электрода малого радиуса r_0 вычисляется по формуле

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \frac{I \rho}{2\pi r_0 a}.$$

Используя двумерный аналог теоремы Остроградского – Гаусса, в силу последнего равенства имеем

$$\iint_{r \leq r_0} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) dx dy = 2\pi r_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -\frac{I \rho}{a}. \quad (7.21)$$

Таким образом, если область интегрирования \mathcal{D} включает электрод, то правая часть (7.20) заменяется на правую часть (7.21). Используя свойство (7.19) дельта-функции Дирака, в пределе бесконечно тонкого электрода записываем уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{I \rho}{a} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0). \quad (7.22)$$

Правая часть этого уравнения содержит дельта-функцию в двух измерениях с размерным множителем.

Пример 7.1. Найти электростатический потенциал поля, создаваемого электродом малого радиуса в бесконечной плоской ленте, окруженной полосами из изолятора. Лента шириной p и толщиной $a \ll p$ изготовлена из материала с удельным сопротивлением ρ .

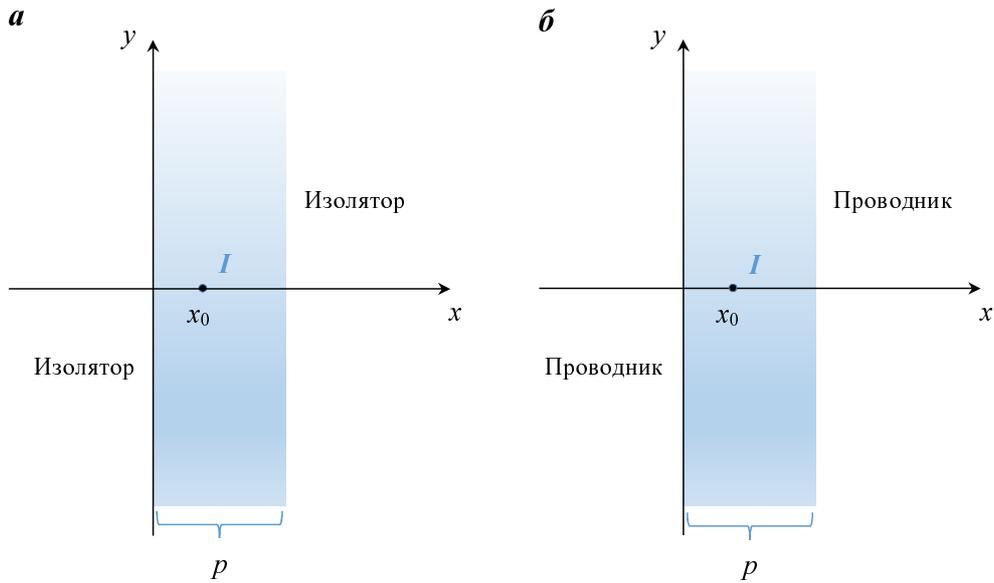


Рис. 7.1. К примерам 7.1 и 7.3

Решение. Введем систему координат так, как показано на рис. 7.1, *a*, причем электрод имеет абсциссу x_0 . Необходимо решить уравнение Пуассона (7.22) с граничными условиями (7.11), приняв $y_0 = 0$. Эти условия выражают отсутствие токов через границу между лентой и изолятором. Использование дельта-функций в правой части (7.22) является модельным приближением и означает, что поперечные размеры электрода малы по сравнению со всеми характерными размерами задачи.

В соответствии с вышесказанным решение ищем в виде разложения по набору функций (7.14), удовлетворяющих граничным условиям (7.11), а именно

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(y) \cos \frac{\pi n x}{p}. \quad (7.23)$$

Напомним, что для функций этого набора справедливы соотношения (7.15) и (7.16). Подстановка (7.23) в (7.22) дает уравнение

$$\sum_{k=0}^{\infty} [Y_k'' - \lambda_k^2 Y_k] \cos \frac{\pi k x}{p} = -\frac{I \rho}{a} \delta(x - x_0) \delta(y), \quad (7.24)$$

где пишем $\lambda_k = \pi k/p$ для краткости. Домножая обе части (7.24) на $\cos(\pi n x/p)$ и интегрируя по x от $x = 0$ до $x = p$, с учетом (7.15) и свойств

дельта-функции получаем обыкновенные дифференциальные уравнения на функции $Y_n(y)$.

Для $n \geq 1$ соответствующее уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} - \lambda_n^2 Y_n = -\frac{2I\rho}{ap} \cos \frac{\pi n x_0}{p} \delta(y). \quad (7.25)$$

Во всех точках оси ординат, кроме точки $y = 0$, уравнение (7.25) является однородным с линейно независимыми решениями $\propto \exp(\pm \lambda_n y)$. Здесь нужно исключить экспоненциально растущие на бесконечности решения, что фактически является граничными условиями в дополнение к (7.11). Учитывая также то, что решение должно быть четной функцией y согласно формулировке задачи, имеем

$$Y_n(y) = B_n \exp(-\lambda_n |y|). \quad (7.26)$$

Две затухающие экспоненты, соответствующие областям $y < 0$ и $0 < y$, нужно «сшить» в точке $y = 0$ в соответствии с правой частью (7.25). Это позволяет найти постоянную B_n . Интегрируя (7.25) по y от $y = -\varepsilon$ до $y = +\varepsilon$, в пределе $\varepsilon \rightarrow +0$ получаем:

$$Y'_n(+0) - Y'_n(-0) = -\frac{2I\rho}{ap} \cos \frac{\pi n x_0}{p}, \quad (7.27)$$

$$B_n = \frac{I\rho}{ap\lambda_n} \cos \frac{\pi n x_0}{p} = \frac{I\rho}{\pi n a} \cos \frac{\pi n x_0}{p}. \quad (7.28)$$

Сама функция (7.26) непрерывна, а ее первая производная имеет «скачок» в точке $y = 0$ согласно (7.27).

Для $n = 0$ дифференциальное уравнение записывается в виде

$$\frac{d^2 Y_0}{dy^2} = -\frac{I\rho}{ap} \delta(y). \quad (7.29)$$

Во всех точках оси ординат, кроме точки $y = 0$, это уравнение имеет решение в виде линейной функции. Принимая во внимание четность функции $Y_0(y)$, записываем

$$Y_0(y) = -B_0 |y|. \quad (7.30)$$

Интегрируя (7.29) по y от $y = -\varepsilon$ до $y = +\varepsilon$, в пределе $\varepsilon \rightarrow +0$ имеем:

$$Y'_0(+0) - Y'_0(-0) = -\frac{I\rho}{ap}, \quad (7.31)$$

$$B_0 = \frac{I\rho}{2ap}. \quad (7.32)$$

По аналогии с функциями вида (7.26) получаем убывающую в обе стороны от точки $y = 0$ функцию, только теперь убывающую линейно. Заметим, что добавление аддитивной константы в правую часть (7.30) будет означать включение аддитивной константы в (7.23). Так как ее присутствие в выражении для потенциала заранее очевидно, она не будет указываться в промежуточных вычислениях.

Подстановка (7.26) и (7.30) в разложение (7.23) приводит к выражению

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= -\frac{I\rho|y|}{2ap} + \frac{I\rho}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda_n|y|)}{n} \cos \frac{\pi n x}{p} \cos \frac{\pi n x_0}{p} = \\ &= -\frac{I\rho|y|}{2ap} + \frac{I\rho}{2\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda_n|y|)}{n} \left\{ \cos \frac{\pi n(x-x_0)}{p} + \cos \frac{\pi n(x+x_0)}{p} \right\}.\end{aligned}$$

С помощью тождества (7.53) и $\lambda_n = \pi n/p$ преобразуем выражение для $\varphi(x, y)$ к форме

$$\begin{aligned}-\frac{I\rho|y|}{2ap} - \frac{I\rho}{4\pi a} \ln \left\{ 1 - 2 \exp\left(-\frac{\pi|y|}{p}\right) \cos \frac{\pi(x-x_0)}{p} + \exp\left(-\frac{2\pi|y|}{p}\right) \right\} - \\ - \frac{I\rho}{4\pi a} \ln \left\{ 1 - 2 \exp\left(-\frac{\pi|y|}{p}\right) \cos \frac{\pi(x+x_0)}{p} + \exp\left(-\frac{2\pi|y|}{p}\right) \right\}.\end{aligned}\quad (7.33)$$

Из последней формулы легко перейти к окончательному выражению

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= -\frac{I\rho}{4\pi a} \ln \left\{ \operatorname{ch}\left(\frac{\pi y}{p}\right) - \cos \frac{\pi(x-x_0)}{p} \right\} - \\ &\quad - \frac{I\rho}{4\pi a} \ln \left\{ \operatorname{ch}\left(\frac{\pi y}{p}\right) - \cos \frac{\pi(x+x_0)}{p} \right\} + \text{const}.\end{aligned}\quad (7.34)$$

С точностью до обозначений и выбора координат данное выражение совпадает с (6.33), но теперь решение получено методом разделения переменных. Как правило, типичные для этого метода выражения в виде бесконечных сумм лишь изредка удается привести к «замкнутой» форме с небольшим числом слагаемых.

Пример 7.2. Исходя из формулы (7.34), проанализировать распределение токов в ленте на большом удалении от источника.

Решение. Поскольку на большом удалении от источника $|y| \gg p$, следует оставить только первое слагаемое в формуле (7.33), а именно

$$\varphi(x, y) \approx -\frac{I\rho|y|}{2ap}.\quad (7.35)$$

Действительно, остальные слагаемые в (7.33) экспоненциально малы. Решение (7.35) получилось для моды по x , отвечающей случаю $n = 0$. Поэтому неудивительно, что зависимость от x отсутствует. Используя (7.35), получаем плотность тока

$$\mathbf{j} = -\sigma \nabla \varphi \approx \pm \mathbf{e}_y \frac{I}{2ap}, \quad (7.36)$$

где знаки минус и плюс ставятся в районах $y \rightarrow -\infty$ и $y \rightarrow +\infty$ соответственно. Итак, на большом удалении от электрода по обе стороны от него вдоль оси y течет ток величиной $I/2$, равномерно распределяясь по площади ap поперечного сечения ленты. Такое распределение тока в ленте на большом удалении от источника является вполне ожидаемым и без вычислений. Интуитивно понятно, что в окруженной изолятором полосе неравномерное распределение тока по ширине не должно проявляться на масштабах столь больших, что поперечными размерами проводника можно пренебречь.

Пример 7.3. Найти электростатический потенциал поля, создаваемого электродом малого радиуса в бесконечной плоской ленте из примера 7.1, но теперь окруженной идеально проводящими полосами.

Решение. Введем систему координат согласно рис. 7.1, б. Теперь нужно решить уравнение (7.22) с граничными условиями (7.4). Решение ищем в виде разложения по набору функций (7.8), удовлетворяющих граничным условиям (7.4), а именно

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \frac{\pi n x}{p}. \quad (7.37)$$

Для функций этого набора имеют место соотношения (7.9) и (7.10). С учетом этого подстановка (7.37) в (7.22) приводит к уравнению (7.25), в правой части которого косинус нужно заменить на синус. Решение снова определяется формулами (7.26) и (7.28), только в последней косинус меняется на синус. В результате выражение (7.37) для потенциала принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{I\rho}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda_n |y|)}{n} \sin \frac{\pi n x}{p} \sin \frac{\pi n x_0}{p} = \\ &= \frac{I\rho}{2\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda_n |y|)}{n} \left\{ \cos \frac{\pi n(x - x_0)}{p} - \cos \frac{\pi n(x + x_0)}{p} \right\}. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Далее с помощью тождества (7.53) и $\lambda_n = \pi n/p$ записываем

$$\varphi(x, y) = \frac{I\rho}{4\pi a} \ln \left\{ 1 - 2 \exp\left(-\frac{\pi|y|}{p}\right) \cos \frac{\pi(x+x_0)}{p} + \exp\left(-\frac{2\pi|y|}{p}\right) \right\} - \\ - \frac{I\rho}{4\pi a} \ln \left\{ 1 - 2 \exp\left(-\frac{\pi|y|}{p}\right) \cos \frac{\pi(x-x_0)}{p} + \exp\left(-\frac{2\pi|y|}{p}\right) \right\}.$$

По аналогии с формулой (7.34) приходим к окончательному выражению

$$\varphi(x, y) = \frac{I\rho}{4\pi a} \ln \left\{ \operatorname{ch}\left(\frac{\pi y}{p}\right) - \cos \frac{\pi(x+x_0)}{p} \right\} - \\ - \frac{I\rho}{4\pi a} \ln \left\{ \operatorname{ch}\left(\frac{\pi y}{p}\right) - \cos \frac{\pi(x-x_0)}{p} \right\} + \operatorname{const}. \quad (7.39)$$

Заметим, что с точностью до обозначений полученный ответ совпадает с результатом (6.21).

Вблизи источника выражения, заключенные в правой части (7.39) в фигурные скобки, можно представить в виде

$$\operatorname{ch}\left(\frac{\pi y}{p}\right) - \cos \frac{\pi(x-x_0)}{p} = 1 + \frac{\pi^2 y^2}{2p^2} - 1 + \frac{\pi^2 \Delta x^2}{2p^2} + O(\varepsilon^4) = \\ = \frac{\pi^2 r^2}{2p^2} + O(\varepsilon^4), \quad (7.40)$$

$$\operatorname{ch}\left(\frac{\pi y}{p}\right) - \cos \frac{\pi(x+x_0)}{p} = 1 - \cos \frac{2\pi x_0}{p} + \sin \frac{2\pi x_0}{p} \Delta x + O(\varepsilon^2) = \\ = 2 \sin^2 \frac{\pi x_0}{p} + \sin \frac{2\pi x_0}{p} \Delta x + O(\varepsilon^2), \quad (7.41)$$

где $x - x_0 = \Delta x \sim \varepsilon$, $y \sim \varepsilon$ и $r^2 = \Delta x^2 + y^2 \sim \varepsilon^2$. По сути повторяются формулы (6.24) и (6.25) соответственно. В непосредственной близости от источника справедливо приближенное выражение (6.27) с подстановкой $J = I/a$; оно становится точным в пределе бесконечной ширины. С другой стороны, на большом удалении от источника потенциал (7.38) содержит экспоненциально малые слагаемые. С физической точки зрения это вполне естественно, когда лента окружена идеальным проводником. В районах $|y| \gg p$ токи практически отсутствуют как вдоль оси y , так и перпендикулярно к ней.

Пример 7.4. Для потенциала, полученного в примере 7.3, вычислить интегралы:

$$a \int_{-\infty}^{+\infty} (-\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{j})|_{x=0} dy, \quad a \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{j})|_{x=p} dy. \quad (7.42)$$

Первый из них описывает полный ток через границу ленты $x = 0$ в область $x < 0$, отсюда и знак минус, а второй – полный ток через границу $x = p$ в область $x > 0$. Проверить, что в сумме эти токи дают I , как и должно быть. Убедиться, что полученные два тока равны при $x_0 = p/2$.

Решение. Используя формулы $\mathbf{j} = \rho^{-1} \mathbf{E}$ и $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$, записываем

$$\pm \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{j} = \frac{\mp 1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (7.43)$$

В результате первый из двух интегралов (7.42) принимает вид

$$\frac{I}{p} \sin \frac{\pi x_0}{p} \int_0^\infty \frac{dy}{\operatorname{ch}(\pi y/p) - \cos(\pi x_0/p)} = \frac{2I \sqrt{1 - \eta^2}}{\pi} \int_1^\infty \frac{dt}{t^2 - 2\eta t + 1},$$

где новая переменная интегрирования $t = \exp(\pi y/p)$ и $\eta = \cos(\pi x_0/p)$. Искомый интеграл выражается через элементарные функции. С учетом формул $t^2 - 2\eta t + 1 = (t - \eta)^2 + 1 - \eta^2$ и

$$\frac{1 - \eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = \frac{1 - \cos(\pi x_0/p)}{\sin(\pi x_0/p)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x_0}{2p}\right)$$

окончательно получаем

$$\begin{aligned} a \int_{-\infty}^{+\infty} (-\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{j})|_{x=0} dy &= \frac{2I}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{t - \eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}\right)\Big|_1^\infty = \\ &= \frac{2I}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x_0}{2p}\right) = I \left(1 - \frac{x_0}{p}\right). \end{aligned} \quad (7.44)$$

Аналогичным образом второй из двух интегралов (7.42) приводится к виду

$$\frac{I}{p} \sin \frac{\pi x_0}{p} \int_1^\infty \frac{dy}{\operatorname{ch}(\pi y/p) + \cos(\pi x_0/p)} = \frac{2I \sqrt{1 - \eta^2}}{\pi} \int_1^\infty \frac{dt}{t^2 + 2\eta t + 1}.$$

С применением формул $t^2 + 2\eta t + 1 = (t + \eta)^2 + 1 - \eta^2$ и

$$\frac{1 + \eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = \frac{1 + \cos(\pi x_0/p)}{\sin(\pi x_0/p)} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x_0}{2p}\right)$$

окончательно находим

$$\begin{aligned} a \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{j})|_{x=p} dy &= \frac{2I}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{t + \eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}\right)\Big|_1^\infty = \\ &= \frac{2I}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi x_0}{2p}\right) = \frac{I x_0}{p}. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Как и следовало ожидать, в сумме токи (7.44) и (7.45) дают внешний ток I . При $x_0 = p/2$ каждый из них равен $I/2$.

Пример 7.5. Найти электростатический потенциал поля, создаваемого электродом малого радиуса в бесконечной плоской ленте, если один из краев ленты граничит с проводником, а другой – с изолятором.

Решение. Этот пример иллюстрирует гибкость метода разделения переменных при изменении наложенных граничных условий. Пусть, как и ранее, лента шириной p и толщиной $a \ll p$ изготовлена из материала с удельным сопротивлением ρ . Если прямая $x = 0$ описывает границу с проводником, а прямая $x = p$ – с изолятором, то граничные условия записываются в виде:

$$\varphi|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=p} = 0. \quad (7.46)$$

Чтобы решить уравнение (7.22) с граничными условиями (7.46), рассмотрим краевую задачу:

$$X''(x) + \nu^2 X(x) = 0, \quad (7.47)$$

$$X(0) = 0, \quad X'(p) = 0, \quad (7.48)$$

решениями которой являются функции $\sin \nu_k x$, где $\nu_k = \pi(2k + 1)/(2p)$ и $k = 0, 1, \dots$. В этом примере разложение (7.17) принимает вид

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(y) \sin \frac{\pi(2k + 1)x}{2p}. \quad (7.49)$$

С учетом соотношений ортогональности (7.55) подстановка (7.49) в (7.22) приводит к уравнению, по форме аналогичному (7.25), а именно

$$\frac{d^2 Y_k}{dy^2} - \nu_k^2 Y_k = -\frac{2I\rho}{ap} \sin \frac{\pi(2k + 1)x_0}{2p} \delta(y). \quad (7.50)$$

Условия «сшивки» в точке $y = 0$ дают формулы $Y_k(+0) = Y_k(-0)$ и, вместо (7.27),

$$Y'_k(+0) - Y'_k(-0) = -\frac{2I\rho}{ap} \sin \frac{\pi(2k + 1)x_0}{2p}.$$

Тем самым решение уравнения (7.50) записывается в виде

$$Y_k(y) = \frac{2I\rho}{\pi(2k + 1)a} \sin \nu_k x_0 \exp(-\nu_k |y|), \quad (7.51)$$

что в комбинации с (7.49) приводит к бесконечной сумме

$$\varphi(x, y) = \frac{I\rho}{\pi a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp(-\nu_k |y|)}{2k+1} \left\{ \cos \nu_k (x - x_0) - \cos \nu_k (x + x_0) \right\}. \quad (7.52)$$

Она вычисляется с применением формулы (7.54), в которой следует принять $\xi = \exp(-\pi|y|/(2p))$ и $\theta_{\pm} = \pi(x \pm x_0)/(2p)$. В результате получаем

$$\varphi(x, y) = \frac{I\rho}{4\pi a} \ln \left(\frac{1 + 2\xi \cos \theta_- + \xi^2}{1 - 2\xi \cos \theta_- + \xi^2} \right) - \frac{I\rho}{4\pi a} \ln \left(\frac{1 + 2\xi \cos \theta_+ + \xi^2}{1 - 2\xi \cos \theta_+ + \xi^2} \right)$$

или, после некоторых преобразований,

$$\varphi(x, y) = \frac{I\rho}{4\pi a} \ln \left(\frac{\operatorname{ch} \nu_0 y + \cos \nu_0 (x - x_0)}{\operatorname{ch} \nu_0 y - \cos \nu_0 (x - x_0)} \frac{\operatorname{ch} \nu_0 y - \cos \nu_0 (x + x_0)}{\operatorname{ch} \nu_0 y + \cos \nu_0 (x + x_0)} \right),$$

где символ $\nu_0 = \pi/(2p)$ использован для сокращения записи.

Может получиться так, что при исследовании некоторых вопросов удобнее начинать с выражения (7.52) и вычислять суммы на последнем этапе. В методе разделения переменных изменение граничных условий сводится к использованию другого набора функций, по которому проводится разложение, но общая структура решения остается прежней. Это не относится к методам нахождения потенциала, рассмотренным в предыдущем параграфе. В общем случае нахождение соответствующего плоской задаче конформного отображения может быть делом весьма непростым. Кроме того, метод разделения переменных легко переносится на случаи большего числа независимых переменных. Более подробно эти вопросы обсуждаются в рамках курса математической физики.

Задача 7.1. Рассматривая $\cos \theta$ как вещественную часть $\exp(i\theta)$ и применяя известное разложение для функции $\ln(1+z)$, доказать соотношение

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n \cos n\theta}{n} = \frac{1}{2} \ln(1 - 2\xi \cos \theta + \xi^2), \quad (7.53)$$

где вещественный параметр $-1 < \xi < +1$.

Задача 7.2. Записав для набора функций $\{\cos n\theta\}_{n=0}^{\infty}$ соотношения ортогональности и применив формулу (7.53), вычислить интеграл

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \ln(1 - 2\xi \cos \theta + \xi^2) \cos n\theta \, d\theta,$$

включая случай $n = 0$.

Задача 7.3. Комбинируя должным образом сумму (7.53) и аналогичное выражение с заменой ξ на $-\xi$, доказать формулу

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+1} \cos(2k+1)\theta}{2k+1} = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1 + 2\xi \cos \theta + \xi^2}{1 - 2\xi \cos \theta + \xi^2} \right). \quad (7.54)$$

Задача 7.4. Непосредственным интегрированием проверить соотношение ортогональности

$$\int_0^p \sin \frac{\pi(2k+1)x}{2p} \sin \frac{\pi(2q+1)x}{2p} dx = \frac{p}{2} \begin{cases} 1, & k = q, \\ 0, & k \neq q. \end{cases} \quad (7.55)$$

Задача 7.5. Для потенциала, найденного в примере 7.5, вычислить интеграл

$$a \int_{-\infty}^{+\infty} (-\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{j})|_{x=0} dy$$

и убедиться в том, что он действительно равен I . Вычисление интеграла упрощается, если подставить потенциал в форме (7.52).

Заключение

В предлагаемом учебно-методическом пособии рассмотрены примеры и задачи на применение закона Ома в той или иной форме, иногда вместе с принципом суперпозиции и соображениями симметрии. Используемый при этом математический аппарат не выходит за рамки знаний студентов 2-го курса физического факультета. Не секрет, что успешный поиск верного подхода к решению кроется в умении выделить наиболее существенные аспекты физической задачи и максимально полно их использовать. Примеры, в которых симметрия и принцип суперпозиции играют центральную роль, могут помочь выработке целостного представления об изучаемом разделе курса. Но случается и так, что «коротких» путей к нахождению ответа не существует, и тогда следует аккуратно проделать все необходимые выкладки. Автор надеется, что предлагаемое пособие окажется полезным при изучении столь важного физического курса, каким является теория электричества.

Данное пособие включает сравнительно небольшое число задач для самостоятельной работы. Если читатель почувствует необходимость прорешать больше задач и, возможно, углубить свои знания, то ему следует обратиться к хорошо зарекомендовавшим себя учебникам и задачникам. В книгах [2; 3] рассмотрено много примеров и задач по электромагнетизму с акцентом на методические вопросы. Большое количество разнообразных задач учебного характера имеется в сборнике [4]. Для обстоятельного изучения теории электромагнитных явлений можно рекомендовать учебники [6; 7]. В известной книге [5] конформные отображения и другие методы теории функций рассматриваются с точки зрения приложений к физическим и техническим задачам. Большое количество примеров, допускающих решение с помощью метода разделения переменных и доведенных до окончательных формул, содержится в руководстве [1].

Список использованной и рекомендуемой литературы

1. *Батыгин В. В.* Современная электродинамика. Часть 1. Микроскопическая теория / В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин. – Москва – Ижевск : Изд-во ИКИ, 2005. – 736 с.
2. *Иродов И. Е.* Электромагнетизм. Основные законы / И. Е. Иродов. – Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 319 с.
3. *Киселев Д. Ф.* Электричество и магнетизм. Методика решения задач / Д. Ф. Киселев, А. С. Жукарев, С. А. Иванов, С. А. Киров, Е. В. Лукашева. – Москва : Физический ф-т МГУ, 2010. – 436 с.
4. *Козел С. М.* Сборник задач по общему курсу физики. Часть 2. Электричество и магнетизм. Оптика / С. М. Козел, В. Г. Лейман, Г. Р. Локшин, В. А. Овчинкин, Э. В. Прут. – Москва : Изд-во МФТИ, 2000. – 368 с.
5. *Лаврентьев М. А.* Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – Москва : Лань, 2002. – 688 с.
6. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Т. III. Электричество / Д. В. Сивухин. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 656 с.
7. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества / И. Е. Тамм. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 616 с.