МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФГБОУ ВПО «ИГУ»
Кафедра теоретической физики

УТВЕРЖДАЮ
_____
_____
"1" 10 2015 г.

Рабочая программа дисциплины

Наименование дисциплины:
Б1.Б.4.7 Интегральные уравнения и вариационное исчисление

Направление подготовки: 03.03.02 Физика

Профили подготовки: Фундаментальная физика
Солнечно-земная физика
Физика конденсированного состояния

Квалификация (степень) выпускника: Бакалавр

Форма обучения: Очная

Согласовано с УМК факультета
_____
Протокол № 34 от «31» августа 2015 г.
Председатель _____

Рекомендовано кафедрой:
Протокол № 1
От «28» августа 2015 г.
И.о. зав. кафедрой _____
С.Э. Коренблит

Иркутск 2015 г.

Содержание

1. Цели и задачи дисциплины (модуля): 3
2. Место дисциплины в структуре ОПОП: 3
3. Требования к результатам освоения дисциплины (модуля): 4
4. Объем дисциплины (модуля) и виды учебной работы (разделяется по формам обучения) 4
5. Содержание дисциплины (модуля) 5
5.1. Содержание разделов и тем дисциплины (модуля) 5
5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами 6
5.3. Разделы и темы дисциплин (модулей) и виды занятий 7
6. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ 7
6.1. План самостоятельной работы студентов 8
6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов 9
7. Примерная тематика курсовых работ (проектов) (при наличии)**Ошибка! Закладка не определена.**
8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля):**Ошибка! Закладка не о**
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля): 11
10. Образовательные технологии: 11
11. Оценочные средства (ОС): 11

1. Цели и задачи дисциплины (модуля):

При изучении дисциплины «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» студенты осваивают математический аппарат, необходимый для изучения важнейших разделов физики, таких как теоретическая механика, электродинамика, квантовая механика, термодинамика, физическая кинетика. Знания, полученные при изучении курса, формируют математическую культуру и составляют основу естественнонаучного подхода к исследованию природных явлений.

Цели курса

Целью курса «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» является изучение однородных и неоднородных линейных интегральных уравнений и их свойств, на основе которых создаются математические модели физических явлений и законов в линейном приближении; изучение понятия функционала и его свойств, представляющих собой математическую основу фундаментальных физических законов.

Задачи курса

- изучение и овладение методами решения интегральных уравнений;
- изучение понятия функционала;
- овладение навыками варьирования функционалов;
- изучение методов и приемов математических доказательств теорем и утверждений;
- формирование у студентов умений и навыков самостоятельного приобретения и применения знаний при исследовании и построении математических моделей;
- овладение студентами знаний по применению интегральных уравнений и вариационного исчисления в различных разделах физики при исследовании физических явлений.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП:

Дисциплина «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» входит в базовую часть общенаучного цикла ОПОП и относится к обязательным дисциплинам. «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» является продолжением цикла математических дисциплин и предполагает знание математического анализа, векторного и тензорного анализа, линейной алгебры и дифференциальных уравнений. Кроме того, данный курс содержит множество примеров из области физики, т.е. студент должен обладать знаниями не только по высшей математике, но и по общей физике. Таким образом, для освоения данной дисциплины студент должен обладать знаниями по следую-

щим дисциплинам: «Математический анализ», «Линейная алгебра», «Векторный и тензорный анализ», «Дифференциальные уравнения», «Теоретическая механика».

3. Требования к результатам освоения дисциплины (модуля):

Процесс изучения дисциплины (модуля) направлен на формирование следующих компетенций:

ОПК-2	способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей
ОК-7	способность к самоорганизации и самообразованию

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать: существующие виды интегральных уравнений; методы решения интегральных уравнений различных видов; основные принципы вариационного исчисления; физические примеры, приводящие к необходимости решения интегрального уравнения или поиска экстремума функционала.

Уметь: решать однородные и неоднородные линейные интегральные уравнения; варьировать функционалы; находить экстремум функционала.

Владеть: приемами и методами доказательства математических теорем; методами решения соответствующих уравнений в требуемом приближении; методами поиска экстремума и условного экстремума функционала.

4. Объем дисциплины (модуля) и виды учебной работы (разделяется по формам обучения)

Вид учебной работы	**Всего часов / зачетных единиц**	**Семестры**	
		4	
Аудиторные занятия (всего)	46 / 1,3	46	
В том числе:	-	-	-
Лекции	18 / 0,5	18	
Практические занятия (ПЗ)	18 / 0,5	18	
Семинары (С)			
Лабораторные работы (ЛР)			
Контроль самостоятельной работы (КСР)	10	10	
Самостоятельная работа (всего)	35 / 0,9	35	
В том числе:	-	-	-
Курсовой проект (работа)	-	-	-

Расчетно-графические работы	-	-	-
Реферат (при наличии)	-	-	-
Самостоятельная работа студентов	35 / 0,9	35	
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен)	27 / 0,75	27	
Контактная работа (всего)	73 / 2,03	73	
Общая трудоемкость часы	108	108	
зачетные единицы	3	3	

5. Содержание дисциплины (модуля)

5.1. Содержание разделов и тем дисциплины (модуля)

Раздел 1 Введение в теорию интегральных уравнений

Тема 1. Определение интегрального уравнения (ИУ), линейного ИУ, классификация линейных интегральных уравнений (уравнения Фредгольма и Вольтерра первого и второго рода, однородные, неоднородные). Ядро, свободный член ИУ, требования к ядру и свободному члену. Примеры физических задач, приводящих к интегральным уравнениям (к уравнению Вольтерра и уравнению Фредгольма). Сведение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения n-порядка к уравнению Вольтерра II рода.

Тема 2. Интегральное уравнение Фредгольма II рода. Определение собственного значения и собственной функции ядра интегрального уравнения. Операторная форма интегрального уравнения. Аналогия между линейным интегральным уравнением и системой линейных алгебраических уравнений.

Тема 3. Однородное уравнение Фредгольма II рода с вырожденным ядром. Сведение его решения к решению системы алгебраических уравнений. Теорема о конечном числе собственных значений вырожденного ядра (с доказательством). Неоднородное уравнение Фредгольма II рода с вырожденным ядром. Определитель Фредгольма, сопряженное к данному интегральное уравнение.

Тема 4. Теорема Фредгольма об альтернативе (с доказательством). Вторая теорема Фредгольма (с доказательством). Третья теорема Фредгольма (с доказательством).

Тема 5. Теорема о том, что однородное ИУ и сопряженное к нему ИУ имеют одно и то же число линейно независимых решений. Нахождение комплексного решения ИУ в случае комплексного ядра и свободного члена.

Тема 6. Метод последовательных приближений для решения ИУ. Теорема о существовании и единственности решения ИУ в случае достаточной малости параметра λ (с доказательством на основании теоремы о неподвижной точке оператора).

Тема 7. Резольвента. Свойства резольвенты. Выражение для резольвенты в случае вырожденного ядра. Случай ядра, близкого к вырожденному (сведение ИУ с таким ядром к уравнению с вырожденным ядром).

Тема 8. Уравнение Вольтерра II рода. Теорема об отсутствии собственных значений уравнения Вольтерра II рода. Нахождение решения уравнения Вольтерра II рода методом последовательных приближений.

Тема 9. Резольвента уравнения Вольтерра II рода, повторные ядра для этого случая. Интегральное уравнение Вольтерра I рода. Сведение его к уравнению II рода.

Тема 10. Случай ИУ Фредгольма II рода с симметричным ядром. Свойства собственных значений и собственных функций такого ядра (ортогональность СФ, отвечающих различным СЗ; вещественность всех СЗ; возможность выбора ортонормированного набора СФ, соответствующих одному СЗ). Формула Шмидта для решения уравнения с симметричным ядром.

Тема 11. Задача Штурма – Лиувилля. Постановка, физические примеры; сведение задачи Штурма – Лиувилля к интегральному уравнению.

Тема 12. Интегральное уравнение Фредгольма I рода как некорректно поставленная задача. Определение корректно поставленной задачи. Доказательство, что ИУ Фредгольма II рода является корректной задачей.

Раздел 2. Введение в вариационное исчисление

Тема 13. Понятие функционала. Понятия вариации аргумента функционала, непрерывности функционала, близости функций в разных порядках. Определение линейного функционала. Понятие вариации функционала как линейной части его приращения и как производной по параметру.

Тема 14. Определение экстремума функционала. Сильный и слабый экстремум. Необходимое условие экстремума. Вывод уравнения Эйлера, понятие экстремали.

Тема 15. Понятие поля экстремалей. Условие Якоби возможности включение экстремали в поле. Достаточное условие экстремума функционала (сильного и слабого).

Тема 16. Условный экстремум функционала. Изопериметрическая задача: теорема Эйлера.

Тема 17. Задача Лагранжа при наличии связей.

Тема 18. Геодезические линии.

5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ № разделов и тем данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых

		(последующих) дисциплин						
1.	Квантовая теория	13	14	15	16	17	18	
2.	Методы математической физики	1	2	3	4	5	6	7
3.	Теория групп	7	8	9	13	14		
4.	Введение в квантовую теорию поля	13	14	15				

5.3. Разделы и темы дисциплин (модулей) и виды занятий

№ п/п	Раздел	Тема	Виды занятий в часах			
			Лекц.	Практ.	СРС	Всего
1.	Раздел 1	Тема 1	1	1	1	3
2.		Тема 2	1	1	2	4
3.		Тема 3	1	1	2	4
4.		Тема 4	1	1	2	4
5.		Тема 5	1	1	2	4
6.		Тема 6	1	1	2	4
7.		Тема 7	1	1	2	4
8.		Тема 8	1	1	2	4
9.		Тема 9	1	1	2	4
10.		Тема 10	1	1	2	4
11.		Тема 11	1	1	2	4
12.		Тема 12	1	1	2	4
13.	Раздел 2	Тема 13	1	1	2	4
14.		Тема 14	1	1	2	4
15.		Тема 15	1	1	2	4
16.		Тема 16	1	1	2	4
17.		Тема 17	1	1	2	4
18.		Тема 18	1	1	2	4

6. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

№ п/п	№ раздела и темы дисциплины (модуля)	Наименование семинаров, практических и лабораторных работ	Трудоемкость (часы)	Оценочные средства	Формируемые компетенции
1	2	3	4	5	6
1.	Раздел 1,	Уравнения Фредгольма II рода с	2	Задание на	ОПК-2,

	Тема 1, 2, 3	вырожденным ядром.		семинаре в виде задач	ОК-7
2.	Раздел 1, Тема 4, 5	Неоднородные уравнения Фредгольма с вырожденным ядром.	2	Задание на семинаре в виде задач	
3.	Раздел 1, Тема 6, 7	Метод последовательных приближений	2	Задание на семинаре в виде задач	
4.	Раздел 1, Тема 8, 9	Решение уравнений Вольтерра.	2	Задание на семинаре в виде задач	
5.	Раздел 1, Тема 10, 11, 12	Уравнения с симметричными ядрами.	2	Задание на семинаре в виде задач	
6.	Раздел 2, Тема 13, 14	Вариационное исчисление. Поиск экстремалей.	2	Задание на семинаре в виде задач	
7.	Раздел 2, Тема 15, 16	Условный экстремум функционала. Изопериметрическая задача.	2	Задание на семинаре в виде задач	
8.	Раздел 2, Тема 17	Условный экстремум функционала. Геодезическая задача.	2	Задание на семинаре в виде задач	
9.	Раздел 2, Тема 18	Условный экстремум функционала. Задача Лагранжа	2	Задание на семинаре в виде задач	

6.1. План самостоятельной работы студентов

№ нед	Тема	Вид самостоятельной работы	Задание	Рекомендуемая литература	Часы
1	Определение интегрального уравнения, линейного ИУ, классификация линейных интегральных уравнений	Внеаудиторная, решение задач	Решение дополнительных интегральных уравнений Фредгольма II рода.	Источники из основной и дополнительной литературы по теме практических занятий; Образовательные ресурсы, доступные по логину и паролю, предоставляемым Научной библиотекой ИГУ и Сторонние сайты	1
2	Операторная форма интегрального уравнения.	Внеаудиторная, решение задач	Сведение задачи Коши n-порядка к интегральному уравнению		2
3	Однородное уравнение Фредгольма II рода с вырожденным ядром.	Внеаудиторная, решение задач	Решение дополнительных интегральных уравнений Фредгольма II рода с вырожденным ядром.		2
4	Теорема Фредгольма об альтернативе	Внеаудиторная, решение задач	Решение дополнительных интегральных уравнений Фредгольма II рода с вырожденным и невырожденным ядром.		2
5	Теорема о том, что однородное ИУ и со-	Внеаудиторная, ре-	Решение комплексных интегральных уравнений Фредгольма		2

	пряженное к нему ИУ имеют одно и то же число линейно независимых решений.	шение задач			
6	Метод последовательных приближений для решения ИУ.	Внеаудиторная, решение задач	Решение дополнительных интегральных уравнений методом последовательных приближений.	Источники из основной и дополнительной литературы по теме практических занятий; Образовательные ресурсы, доступные по логину и паролю, предоставляемым Научной библиотекой ИГУ и Сторонние сайты	2
7	Резольвента.	Внеаудиторная, решение задач	Решение дополнительных интегральных уравнений методом нахождения резольвенты.		2
8	Уравнение Вольтерра II рода.	Внеаудиторная, решение задач	Сведение интегрального уравнения Вольтера к интегральному уравнению Фредгольма.		2
9	Резольвента уравнения Вольтерра II рода.	Внеаудиторная, решение задач	Решение дополнительных интегральных уравнений Вольтера методом нахождения резольвенты.		2
10	Случай ИУ Фредгольма II рода с симметричным ядром.	Внеаудиторная, решение задач	Решение дополнительных интегральных уравнений с симметричным ядром.		2
11	Задача Штурма – Лиувилля.	Внеаудиторная, решение задач	Сведение задачи Штурма – Лиувилля к интегральному уравнению.		2
12	Интегральное уравнение Фредгольма I рода как некорректно поставленная задача.	Внеаудиторная, решение задач	Изучить регуляризующий алгоритм Тихонова.		2
13	Понятие функционала.	Внеаудиторная, решение задач	Найти физические примеры, в которых фигурируют функционалы		2
14	Определение экстремума функционала. Сильный и слабый экстремум.	Внеаудиторная, решение задач	Решение дополнительных примеров по поиску экстремума функционала.		2
15	Понятие поля экстремалей. Условие Якоби возможности включение экстремали в поле.	Внеаудиторная, решение задач	Графическое представление поля экстремалей.		2
16	Условный экстремум функционала. Изопериметрическая задача	Внеаудиторная, решение задач	Решение дополнительных изопериметрических задач		2
17	Задача Лагранжа при наличии связей.	Внеаудиторная, решение задач	Решение дополнительных задач по поиску условного экстремума в задаче Лагранжа.		2
18	Геодезические линии.	Внеаудиторная, решение задач	Решение дополнительных геодезических задач.		2

6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

В разделе 6.1. студентам для самостоятельного углубленного изучения дисциплины (параллельно с лекциями) предлагаются задачи по изучаемым разделам и график их изучения. Предполагается, что студент самостоятельно изучит дополнительные

графы по пройденной теме, представленные в литературе из п. 8, а затем решит предложенные в п. 6.1 квантово-механические задачи. Оценка самостоятельной работы студентов проводится в виде контрольных опросов на практических занятиях.

7. Примерная тематика курсовых работ (проектов) (при наличии)

Учебным планом не предусмотрено написание курсовых работ (проектов)

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля):

а) основная литература

1. Краснов М. Л. Вариационное исчисление. Задачи и примеры с подробными решениями : учеб. пособие для студ. втузов / М. Л. Краснов, Г. И. Макаренко, А. И. Киселев. - 3-е изд., испр. - М. : Либроком, 2010. - 168 с. - ISBN 978-5-397-01274-4 нф А625989; физмат 32323(25 экз.); физмат 32323(40 экз.)
2. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах : учеб. пособие / А. Б. Васильева [и др.]. - 3-е изд., испр. - СПб. : Лань, 2010. - 429 с. - ISBN 978-5-8114-0988-4 нф А625474; физмат 31398(50 экз.)

б) дополнительная литература

1. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию : учеб. пособие для студ. втузов / М. Л. Краснов. - 2-е изд., стер. - М. : КомКнига, 2006. - 303 с. (нф А602396, 1 экз.)
2. Краснов М. Л. Вариационное исчисление : учеб. пособие для втузов / М. Л. Краснов, Г. И. Макаренко, А. И. Киселев. - М. : Наука, 1973. - 191 с. (нф 959201; нф 203057пф, 2 экз.)
3. Васильева А. Б. Интегральные уравнения : учеб. для студ. физич. спец. и спец. "Прикладн. математика" / А. Б. Васильева, Н.А. Тихонов. - 2-е изд. - М. : Физматлит, 2004. - 159 с. физмат 19123(24 экз.); физмат 19123(5 экз.)
4. Краснов М. Л. Интегральные уравнения : задачи и примеры с подробными решениями: Учеб. пособие для студ. втузов / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. - 3-е изд., испр. . - М. : Едиториал УРСС, 2003. - 190 с. нф А581448; физмат 19183(18 экз.); физмат 19183(20 экз.)
5. Эльсгольц Л. Э. Вариационное исчисление : учеб. для физ. и физ.-мат. фак. ун-тов / Л. Э. Эльсгольц. - 6-е изд. - М. : КомКнига, 2006. - 205 с. (нф А602349, 1 экз.)

Сверено с НБ ИГУ

в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

http://library.isu.ru/ - Научная библиотека ИГУ;

Образовательные ресурсы, доступные по логину и паролю, предоставляемым Научной библиотекой ИГУ:

- https://isu.bibliotech.ru/ - ЭЧЗ «БиблиоТех»;
- http://e.lanbook.com - ЭБС «Издательство «Лань»;
- http://rucont.ru - ЭБС «Руконт» - межотраслевая научная библиотека, содержащая оцифрованные книги, периодические издания и отдельные статьи по всем отраслям знаний, а также аудио-, видео-, мультимедиа софт и многое другое;
- http://ibooks.ru/ - ЭБС «Айбукс»- интернет ресурсы в свободном доступе.

9. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля):

При необходимости – мультимедийный проектор, офисное оборудование для оперативного размножения иллюстративного и раздаточного лекционного материала.

10. Образовательные технологии:

При изучении данной дисциплины используются следующие образовательные технологии:

1. Компьютерные симуляции для демонстрации поведения различных решений интегральных уравнений, иллюстраций задач вариационного исчисления (построение поля экстремалей, задача восстановления четкости размытого изображения и т.д.)
2. Семинарские занятия с ведущими российскими и зарубежными физиками, приглашенными из других организаций, научных и образовательных.

11. Оценочные средства (ОС):

11.1. Оценочные средства для входного контроля:

Не требуются.

11.2. Оценочные средства текущего контроля.

Контрольные задачи для проведения текущего контроля:

1. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение:

$$\varphi(x) = x - \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt$$

2. С помощью резольвенты найти решение интегрального уравнения:

$$\varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt$$

3. Решить интегральное уравнение с вырожденным ядром:

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 \arccos\, t\ \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4. Решить неоднородное интегральное уравнение:

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi} K(x,t)\,\varphi(t)\,dt=1, \qquad K(x,t)=\begin{cases}\sin x\,\cos t, & 0\le x\le t,\\ \sin t\,\cos x, & t\le x\le \pi\end{cases}$$

5. Найти экстремали в изопериметрической задаче:

$$J[y]=\int_0^1 (x^2+y'^2(x))\,dx; \qquad y(0)=0,\ y(1)=0\text{, при условии } \int_0^1 y^2(x)\,dx=2$$

11.3. Оценочные средства для промежуточной аттестации (в форме экзамена или зачета).

Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов:

№ п\п	Вид контроля	Контролируемые темы (разделы)	Компетенции, компоненты которых контролируются
1.	Собеседование по теме;	Раздел 1. Введение в теорию интегральных уравнений	ОПК-2, ОК-7
2.	Контрольная работа; Проверка решений задач	Раздел 2. Введение в вариационное исчисление	
3.	Экзамен	Все разделы	ОПК-2, ОК-7

Демонстрационный вариант контрольной работы

1. Решить интегральное уравнение с вырожденным ядром:

$$y(x)=\int_{-1}^{1} e^{\arcsin x}\,y(s)\,ds+tg\,x$$

2. Решить методом последовательных приближений:

$$y(x)=\sin x+\lambda\int_0^{\pi}\frac{2+\cos x}{2+\cos s}\,y(s)\,ds$$

3. Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра λ:

$$y(x)=\lambda\int_0^{2\pi}|x-\pi|\,y(s)\,ds+x$$

4. С помощью резольвенты найти решение интегрального уравнения:

$$y(x)=\lambda\int_0^{\pi/2}\sin x\,\cos s\,y(s)\,ds+\sin x$$

Пример вопросов для собеседования

1. Привести отличия интегрального уравнения Фредгольма и Вольтера. Продемонстрировать сведение одного интегрального уравнения к другому.
2. Свести задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка к уравнению Вольтерра II рода.
3. Привести пример центрального поля экстремалей.

Примерный перечень вопросов и заданий к экзамену

Теоретические вопросы:

1. Определение интегрального уравнения (ИУ), линейного ИУ, классификация линейных интегральных уравнений. Ядро, свободный член ИУ, требования к ядру и свободному члену. Примеры физических задач, приводящих к интегральным уравнениям (к уравнению Вольтерра и уравнению Фредгольма).
2. Сведение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения n-порядка к уравнению Вольтерра II рода.
3. Интегральное уравнение Фредгольма II рода. Собственные значения и собственные функции ядра интегрального уравнения. Операторная форма интегрального уравнения. Аналогия между линейным интегральным уравнением и системой линейных алгебраических уравнений.
4. Однородное уравнение Фредгольма II рода с вырожденным ядром. Сведение его решения к решению системы алгебраических уравнений.
5. Теорема о конечном числе собственных значений вырожденного ядра (с доказательством).
6. Неоднородное уравнение Фредгольма II рода с вырожденным ядром. Сведение такого уравнения к системе алгебраических уравнений. Определитель Фредгольма, сопряженное к данному интегральное уравнение.
7. Теорема Фредгольма об альтернативе (с доказательством).
8. Вторая теорема Фредгольма (случай, когда однородное уравнение имеет только тривиальное решение) (с доказательством).
9. Третья теорема Фредгольма (случай, когда однородное уравнение имеет нетривиальное решение) (с доказательством).
10. Теорема об одинаковом числе линейно независимых решений однородного и сопряженного к нему интегральных уравнений (с доказательством). Нахождение комплексного решения интегрального уравнения в случае комплексного ядра и свободного члена.
11. Метод последовательных приближений для решения интегрального уравнения.
12. Теорема о существовании и единственности решения интегрального уравнения в случае достаточной малости параметра λ (с доказательством на основании теоремы о неподвижной точке оператора).
13. Резольвента интегрального уравнения. Свойства резольвенты.
14. Резольвента интегрального уравнения в случае вырожденного ядра.
15. Случай ядра интегрального уравнения, близкого к вырожденному. Сведение интегрального уравнения с таким ядром к уравнению с вырожденным ядром.
16. Уравнение Вольтерра II рода. Теорема об отсутствии собственных значений уравнения Вольтерра II рода.
17. Нахождение решения уравнения Вольтерра II рода методом последовательных приближений.
18. Резольвента уравнения Вольтерра II рода, повторные ядра для этого случая.
19. Интегральные уравнения Вольтерра I и II рода. Связь между ними.
20. Интегральное уравнение Фредгольма II рода с симметричным ядром. Свойства собственных значений и собственных функций такого ядра. Формула Шмидта для решения уравнения с симметричным ядром.

21. Задача Штурма – Лиувилля. Сведение задачи Штурма – Лиувилля к интегральному уравнению.
22. Интегральное уравнение Фредгольма I рода как некорректно поставленная задача.
23. Интегральное уравнение Фредгольма II рода с точки зрения корректности постановки математической задачи.
24. Функционал. Вариация аргумента функционала. Непрерывность функционала, близость функций в разных порядках. Вариация функционала (два определения).
25. Экстремум функционала. Сильный и слабый экстремум. Необходимое условие экстремума.
26. Уравнение Эйлера для вариационной задачи. Экстремаль. Поле экстремалей.
27. Достаточное условие экстремума функционала (сильного и слабого).
28. Условный экстремум функционала. Изопериметрическая задача.

Практические задания:

1. Составить интегральное уравнение, соответствующее следующему дифференциальному уравнению с заданными начальными условиями:
$$y''+y=0;\quad y(0)=0,\ \ y'(0)=1$$
2. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение:
$$\varphi(x)=x-\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt$$
3. С помощью резольвенты найти решение интегрального уравнения:
$$\varphi(x)=e^x+\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt$$
4. Решить интегральное уравнение с вырожденным ядром:
$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi/2}\sin x\,\cos t\,\varphi(t)\,dt=\sin x$$
5. Найти характеристические числа и собственные функции для интегрального уравнения с вырожденным ядром:
$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi/4}\sin^2 x\,\varphi(t)\,dt=0$$
6. Решить однородное интегральное уравнение:
$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}\cos(x+t)\,\varphi(t)\,dt=0$$
7. Решить неоднородное интегральное уравнение:
$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}K(x,t)\,\varphi(t)\,dt=1,\qquad K(x,t)=\begin{cases}\sin x\,\cos t,\ 0\le x\le t,\\ \sin t\,\cos x,\ \ t\le x\le\pi\end{cases}$$
8. Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра λ:
$$\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1}xe^t\,\varphi(t)\,dt=x$$
9. Решить методом последовательных приближений:

$$y(x)+\int_0^x y(s)\,ds = x+\frac{x^2}{2}$$

10. Определить собственные функции и собственные значения интегрального уравнения:

$$y(x)=\lambda\int_0^{2\pi}\sin(x+s)y(s)\,ds$$

11. Найти экстремали следующего функционала:

$$J[y]=\int_{-1}^{0}(12xy-y'^2)\,dx; \qquad y(-1)=1,\ y(0)=0$$

12. Исследовать на экстремум функционал:

$$J[y]=\int_0^1 e^x\left(y^2+\frac{1}{2}y'^2\right)dx; \qquad y(0)=1,\ y(1)=e$$

13. Найти экстремали в изопериметрической задаче:

$$J[y]=\int_0^1 y'^2(x)\,dx; \qquad y(0)=1,\ y(1)=6\text{, при условии } \int_0^1 y(x)\,dx=3$$

14. Найти кратчайшее расстояние между точками $A(1,-1,0)$ и $B(2,1,-1)$, лежащими на поверхности $15x-7y+z-22=0$

Разработчики:

(подпись) Старший преподаватель кафедры теоретической физики И.А. Перевалова

Программа рассмотрена на заседании кафедры теоретической физики
(наименование)

«28» 08 2015 г.

Протокол №1 И.о Зав.кафедрой

Настоящая программа не может быть воспроизведена ни в какой форме без предварительного письменного разрешения кафедры-разработчика программы.