Основные понятия курса ТФКП

1 Комплексное число

Мнимая единица i

Определяется уравнением $i^2 = -1$.
1) $i \cdot (-i) = 1$.
2) $i^{-1} = 1/i = i/i^2 = i/(-1) = -i$.

Комплексные числа

Числа $\mathbf{z}$, имеющие как *вещественную* $\mathrm{Re}(z)$, так и *мнимую* $\mathrm{Im}(z)$ часть. Вещественная часть $\mathrm{Re}(z)$ – это все, что не имеет множителя i. Мнимая часть $\mathrm{Im}(z)$ – все, что имеет множитель i в первой степени. Все множители i^n должны быть преобразованы согласно основному уравнению $i^2 = -1$.

Существует два представления для комплексных чисел:
1) *Канонический* вид: $z = x + iy$, где $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$. Обратите внимание, что $\mathrm{Im}(z) \neq iy$!
2) *Геометрическое представление*: $z = |z|\exp(i\varphi)$, где $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – *модуль* комплексного числа z, $\varphi = \mathrm{arctg}(y/x)$ – *фаза* комплексного числа.

Формула Эйлера

Связывает геометрическое представление и каноническое при помощи соотношения:

$$\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi\,.$$

Отсюда следует
1) $\mathrm{Re}(z) = x = |z|\cos\varphi$
2) $\mathrm{Im}(z) = y = |z|\sin\varphi$

Операции над комплексными числами

1) Сложение / вычитание: $z = z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$.
2) Умножение: $z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$.
3) *Комплексное сопряжение*: $z^* = x - iy = |z|\exp(-i\varphi)$. Операция комплексного сопряжения сводится к замене $i \to -i$ в комплексном числе.
4) Вычисление квадрата модуля комплексного числа: $|z|^2 = z \cdot z^* = x^2 + y^2$.
5) Деление:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\exp\left[i(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

6) Вычисление $\mathrm{Re}(z)$ и $\mathrm{Im}(z)$: $\mathrm{Re}(z) = x = (z + z^*)/2$, $\mathrm{Im}(z) = y = (z - z^*)/2$.
7) Сравнение двух комплексных чисел: числа z_1 и z_2 равны тогда и только тогда, когда $\mathrm{Re}(z_1) = x_1 = \mathrm{Re}(z_2) = x_2$ и $\mathrm{Im}(z_1) = y_1 = \mathrm{Im}(z_2) = y_2$ одновременно.

Уравнения областей на комплексной плоскости

1) Условия вида $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{const}$, $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{const}$, или $x = \mathrm{const}$, $y = \mathrm{const}$ определяют вертикальную и горизонтальную прямую на комплексной плоскости соответственно. Условия с неравенствами делят плоскость на две полуплоскости, см. Рис. 1.
2) Условие вида $|z - z_0| = R = \mathrm{const}$ определяет окружность радиуса R с центром в точке z_0 на комплексной плоскости. Условия с неравенствами выделяют внутренность либо внешность окружности. См. рис. 2.
2) Условие вида $\varphi = \mathrm{const}$ определяет наклонную прямую, проведенную из начала координат под углом φ по отношению к оси x. Парные условия с неравенствами либо условия на модуль $|\varphi|$ выделяют сектор на комплексной плоскости. См. рис. 3.

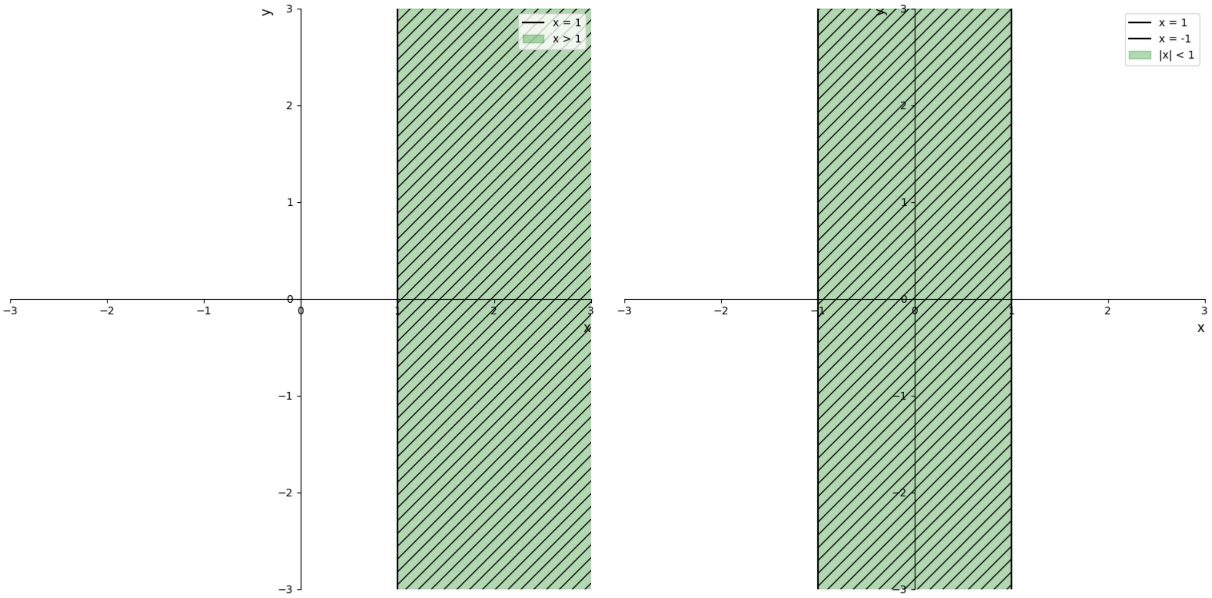

Рис. 1: Изображения областей, заданных условиями $x > 1$, $|x| < 1$ соответственно.

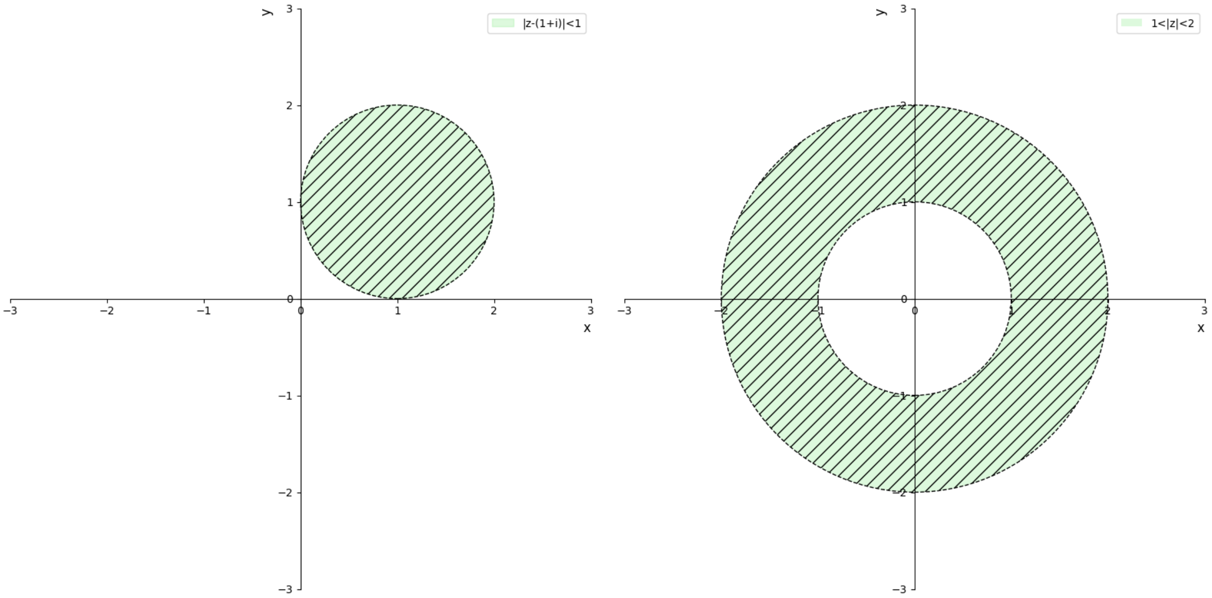

Рис. 2: Изображения областей, заданных условиями $|z - (1 + 1 \cdot i)| < 1$, $1 < |z| < 2$ соответственно.

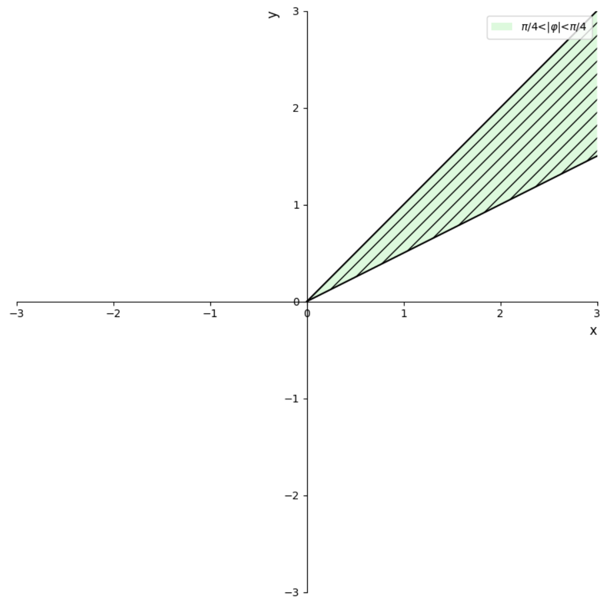

Рис. 3: Изображение области, заданной условием $\pi/6 < |\varphi| < \pi/4$.

2 Решение уравнений вида $z^n = a$

Уравнение вида $z^n = a$ является уравнением n-го порядка и имеет n решений z_k, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ на комплексной плоскости. Комплексное число a имеет вид $a = |a|\exp(i\varphi_a)$, где $|a|$ – модуль комплексного числа a, φ_a – его фаза. Решения находятся как

$$z_i = |a|^{1/n}\exp\left[i\left(\frac{\varphi_a}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right],\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1.$$

Квадратные уравнения вида $z^2 = a$ **также** решаются **только** по этой схеме.

3 Функция комплексного переменного

Функция $f(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ имеет вещественную $u(x, y)$ и мнимую $v(x, y)$ часть:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Вещественные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ уже не содержат мнимых единиц i. Если это не так, следует привести функцию $f(z)$ к указанному виду до начала работы с ней.

4 Условие существования производной функции КП (Условия Коши-Римана)

Для того, чтобы существовала производная $f'_z(z) = df(z)/dz$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Производную $f'_z(z)$ тогда можно найти как

$$f'_z(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Важно! В общем случае полная и частная производная функции $f(z)$ **не совпадают**:

$$f'_z(z) = \frac{df(z)}{dz} \neq \frac{\partial f(z)}{\partial z}!$$

5 Интегрирование функций по контурам

Интеграл функции $f(z)$ по произвольному незамкнутому контуру L на комплексной плоскости имеет вид:

$$I = \int_L f(z)dz.$$

Для вычисления интеграла по контуру следует выполнить следующие шаги:

1) Контур L разбить на отдельные отрезки, $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_i$, представляющие собой а) горизонтальные отрезки, б) вертикальные отрезки, в) часть дуги окружности, г) наклонные прямые с углом наклона $\varphi = \text{const}$.

2) На каждом из полученных участков L_i провести упрощение дифференциала dz, пользуясь представлениями $z = x + iy$, $dz = dx + idy$, или $z = |z| \exp[i\varphi]$, $dz = \exp[i\varphi]\, d|z| + i|z| \exp[i\varphi]\, d\varphi$ в зависимости от типа отрезка: а) для горизонтальных отрезков, $y = \text{const}$, $dy = 0$, $dz = dx$; б) для вертикальных отрезков, $x = \text{const}$, $dx = 0$, $dz = idy$; в) для части дуги, $|z| = \text{const}$, $d|z| = 0$, $dz = i|z| \exp[i\varphi]\, d\varphi$; г) для наклонных отрезков, $\varphi = \text{const}$, $d\varphi = 0$, $dz = \exp[i\varphi]\, d|z|$.

3) Представить функцию $f(z)$ через вещественную и мнимую части $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, и раскрыть возникшие скобки, например, в виде

$$I_i = \int_{L_i} f(z)dz = \int_{L_i} [u(x, y) + iv(x, y)]\,(dx + idy) = \int_{L_i} u(x, y)dx + i \int_{L_i} u(x, y)dy + i \int_{L_i} v(x, y)dx - \int_{L_i} v(x, y)dy.$$

4) Вычислить каждый из интегралов I_i и сложить результаты, $I = I_1 + I_2 + \ldots + I_i$.

Интегралы по замкнутым контурам вычисляются по формуле Коши, см. далее.

6 Вычисление вычета функции в полюсе

Полюсом функции $f(z)$ называется точка a, в которой значение $f(z)$ стремится к бесконечности:

$$\lim_{z \to a} f(z) = \pm\infty.$$

В частности, если функция имеет вид

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - a)^n}, \tag{1}$$

где функция $g(z)$ не имеет полюсов, то функция $f(z)$ обладает полюсом n-го порядка в точке a.

Вычет функции $f(z)$ в полюсе $z = a$ кратности n обозначается $\text{res} f(z)|_{z=a}$ и вычисляется как

$$\text{res} f(z)|_{z=a} = 2\pi i \frac{[f(z)(z - a)^n]^{(n-1)}}{(n - 1)!}\bigg|_{z=a},$$

где верхний индекс $(n - 1)$ означает $n - 1$ полную производную.

В частности, для функции вида (1) вычет в точке a будет иметь вид

$$\text{res} f(z)|_{z=a} = 2\pi i \frac{g(z)^{(n-1)}}{(n - 1)!}\bigg|_{z=a}.$$

Вычет в бесконечности $z = +\infty$ можно найти двумя основными способами:

1) По формуле

$$\text{res} f(z)|_{z=+\infty} = \lim_{z \to +\infty} \left[z\left(f(+\infty) - f(z)\right)\right],$$

если значение $f(+\infty) = \lim_{z \to +\infty} f(z)$.

2) Вычет в бесконечности равен сумме вычетов функции во всех остальных особых точках (полюсах), взятой с обратным знаком:

$$\text{res} f(z)|_{z=+\infty} = -\sum_{z=z_0} \text{res} f(z).$$

7 Формула Коши

Интеграл по замкнутому контуру L от функции $f(z)$ равен сумме вычетов по полюсам функции $f(z)$, находящимся внутри контура:

$$\oint_L f(z)dz = \sum_{z=a_i} \text{res} f(z)|_{z=a_i}.$$

8 Разложение в ряд Лорана

Разложение функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0 в кольце $r < |z - z_0| < R$ имеет вид

$$f(z) = \mathrm{M} + \mathrm{Reg},\ \mathrm{M} = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z - z_0)^n,\ \mathrm{Reg} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n,$$

где M – *главная* часть ряда Лорана, Reg – *регулярная* часть ряда Лорана. Регулярная часть ряда Лорана совпадает с рядом Тейлора данной функции. Коэффициенты C_n вычисляются как интегралы по замкнутому контуру Г, лежащему между колец r и R, проведенных вокруг точки z_0:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Наиболее важен коэффициент C_{-1}, который совпадает со значением вычета в функции $f(z)$ в точке z_0.

Примеры решения типовых задач

Операции с комплексными числами

Везде будем использовать два набора комплексных чисел,

a) $z_1 = 1 + 1i$, $x_1 = 1$, $y_1 = 1$; $z_2 = -1 + 3i$, $x_2 = -1$, $y_2 = 3$;

b) $z_1 = 4 + 2i$, $x_1 = 4$, $y_1 = 2$; $z_2 = -1 - 1i$, $x_2 = -1$, $y_2 = -1$.

1) Сложение:

a) $z = z_1 + z_2 = (1 - 1) + i(1 + 3) = 0 + 3i$.

b) $z = z_1 + z_2 = (4 - 1) + i(2 - 1) = 3 + 1i$.

2) Умножение

a) $z = z_1 \cdot z_2 = (1 + 1i)(-1 + 3i) = -1 + 3i^2 + i(-1 + 3) = -4 + 2i$.

b) $z = z_1 \cdot z_2 = (4 + 2i)(-1 - i) = -4 - 2i^2 + i(-2 - 4) = -2 - 6i$.

3) Вычисление модуля комплексного числа

a) $|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $|z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

b) $|z_1| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$; $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

4) Вычисление комплексно сопряженного: $z^* = (x + iy)^* \to x - iy$

a) $z_1^* = 1 - 1i$, $z_2^* = -1 - 3i$.

b) $z_1^* = 4 - 2i$, $z_2^* = -1 + 1i$.

5) Деление $z = z_1/z_2 = (z_1 \cdot z_2^*)/(z_2 \cdot z_2^*) = (z_1 \cdot z_2^*)/|z_2|^2$

a) $z = \frac{(1+1i)(-1-3i)}{10} = \frac{-1+3}{10} + i\frac{-1-3}{10} = \frac{2}{10} - i\frac{4}{10}$.

b) $z = \frac{(1+1i)(-1-3i)}{10} = \frac{-1+3}{10} + i\frac{-1-3}{10} = \frac{2}{10} - i\frac{4}{10}$.

6) Перевод из канонической формы в геометрическую $z = x + iy \to z = |z|\exp(i\varphi)$

a) $z_1 = |z_1|\exp(i\varphi_1)$, $|z_1| = \sqrt{2}$, $\varphi_1 = \mathrm{arctg}(y_1/x_1) = \mathrm{arctg}(1) = \pi/4 + 2\pi n$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; $|z_2| = \sqrt{10}$, $\varphi_2 = \mathrm{arctg}(-3)$.

b) $|z_1| = \sqrt{20}$, $\varphi_1 = \mathrm{arctg}(1/2)$; $|z_2| = \sqrt{2}$, $\varphi_2 = \mathrm{arctg}(1)$.

7) Перевод из геометрической формы в каноническую $z = |z|\exp(i\varphi) \to z = x + iy$

a) $z_1 = |z_1|\exp(i\varphi_1) = |z_1|\cos\varphi_1 + i|z_1|\sin\varphi_1 = \sqrt{2}\cos(\pi/4) + i\sqrt{2}\sin(\pi/4) = 1 + 1i$; $z_2 = \sqrt{10}\cos(\mathrm{arctg}(-3)) + i\sqrt{10}\sin(\mathrm{arctg}(-3)) = -1 + 3i$

b) $z_1 = \sqrt{20}\cos(\mathrm{arctg}(1/2)) + i\sqrt{20}\sin(\mathrm{arctg}(1/2)) = -4 + 2i$; $z_2 = \sqrt{2}\cos(\mathrm{arctg}(1)) + i\sqrt{2}\sin(\mathrm{arctg}(1)) = 1 + 1i$

Решение степенных уравнений

Решение уравнения $z^3 = 1 + i$. Примем $a = 1 + i$. Вычислим $|a| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\varphi_a = \mathrm{arctg}(1/1) = \pi/4$. Исходное уравнение – третьего порядка, $n = 3$, следовательно, имеет три решения, которые находим по формуле

$$z_k = |a|^{1/3}\exp\left[i\left(\frac{\varphi_a}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right],\ k = 0, 1, 2.$$

Таким образом, имеем три решения: $z_0 = 2^{1/6}\exp[i\pi/12]$, $z_1 = 2^{1/6}\exp[i\,(\pi/12 + 2\pi/3)]$, $z_2 = 2^{1/6}\exp[i\,(\pi/12 + 4\pi/3)]$.

Важные комплексные числа и представления

1) $1 = \exp(i\pi n)$, n – любое целое **четное** (±0, ±2, ±4 и т.д.)

2) $-1 = \exp(i\pi n)$, n – любое целое **нечетное** (±1, ±3, ±5 и т.д.)

3) $i = \exp(i\frac{\pi}{2} + i2\pi n)$, n – любое целое

4) $-i = \exp(i\frac{3\pi}{2} + i2\pi n)$, n – любое целое

Список домашних заданий

Занятие 1: Евграфов (1.04), (1.06), (1.07)[1-5, 11, 12].
Занятие 2: Евграфов (1.13), (1.14).
Занятие 3: Евграфов (1.58).
Занятие 4: ККМ (Краснов, Киселев, Макаренко) (59), (60), (66), (67).
Занятие 5: Евграфов (8.01)[2, 4, 6], (8.07)[2, 4], (8.23)[2, 4, 6], (8.31)[2, 4], (8.35)[2], (8.40)[2, 4, 5], (8.51)[2, 4, 7, 8].
Занятие 6: Евграфов (10.13), (10.19), (10.21), (10.20), (10.22), (10.26), (10.27); ККМ (141), (146б).
Занятие 7: Евграфов (11.01)[3, 6], 11.04[1, 2], 11.06[3, 4]; ККМ (14), стр. 60.

Литература:

Практика: М.А. Евграфов, Сборник задач по аналитической теории функций (1972) (Учебник на сайте "Книжный архив")
Практика: М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко, Функции комплексного переменного. Задачи и примеры с подробными решениями (2003) (Учебник на сайте химфака МГУ)
Теория: М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко, Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости (1981) (Учебник на сайте "Вопросы СССР")