Производная, дифференциал, правила дифференцирования

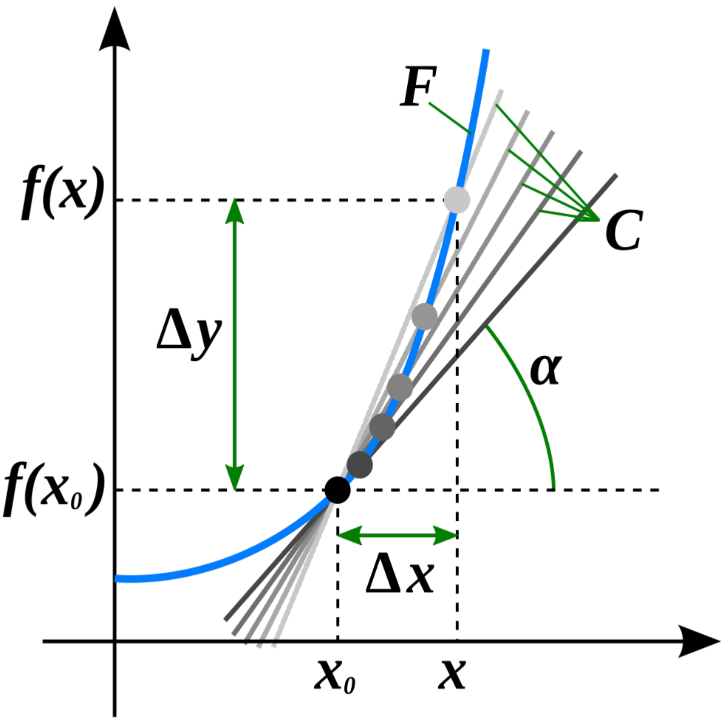
1 Функции одной переменной

Функция. Производная, дифференциал, частная производная

Функция ставит в соответствие каждому значению из набора x значение из набора y:

$$y = f(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ – это правило, по которому сопоставляются значения x и y. Совокупность возможных значений, обозначенная x, называется *переменной*, или *аргументом*, а совокупность значений y – *функцией*. Функции одной переменной можно представить как кривую, для которой x является абсциссой (осью x), а $y = f(x)$ – ординатой (осью y):



Сдвиг на величину $\triangle x = x - x_0$ по оси x приводит к изменению функции $f(x)$ на величину $\triangle f(x) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$. При сокращении расстояния $\triangle x$ до исчезающе малых величин, т.е. при устремлении $\triangle x \to 0$, мы можем ввести понятие бесконечно малого приращения, или дифференциала для аргумента,

,

$$dx = \lim_{\triangle x \to 0} \triangle x, \tag{2}$$

и дифференциала для функции $f(x)$,

$$df(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \triangle f(x). \tag{3}$$

Теперь мы можем ввести понятие *скорости роста функции* в точке x_0 как отношение

$$v = f_x^{'}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = \frac{df(x)}{dx}, \tag{4}$$

которое называется <u>*полной производной*</u> от функции $y = f(x)$. Еще это тангенс угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$ относительно оси x в точке $x = x_0$, см. рисунок. Величина v также называется *частной производной* и обозначается $\partial f(x)/\partial x$[1]. Именно ее приводят в таблицах вычисления производных.

<u>Итак</u>, для функции $y = f(x)$ одной переменной x существуют:

1. Дифференциал, или конечное приращение функции $df(x) = vdx = f_x^{'}(x)dx = \frac{\partial f(x)}{\partial x}dx$;
2. Частная производная $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$, или скорость роста функции в точке при изменении в направлении x (направление пока одно, вдоль оси x);
3. Полная производная $\frac{df(x)}{dx}$, отношение приращений, которая в одномерном случае совпадает с частной производной, что следует из формулы (4).

Важные свойства при вычислении частных производных

1. Линейность $y = f(x) + g(x) \Longrightarrow y' = f'(x) + g'(x)$;
2. Производная произведения $y = f(x) \cdot g(x) \Longrightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;
3. Отношение есть произведение: $y = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \Longrightarrow y' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$;

Производная сложной функции

Рассмотрим функцию $y = f(g(x))$. Функция $g(x)$ играет роль <u>аргумента</u> функции f, а переменная x играет роль аргумента функции g[2]. Чтобы вычислить полную производную по x от сложной функции, нужно продифференцировать внешнюю функцию f по ее аргументу (вычислить <u>частную</u> производную от f по g), а затем получившееся выражение умножить на производную от g по x[3]:

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{\partial f(g)}{\partial g}\frac{dg(x)}{dx} = \frac{\partial f(g)}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dx} = \frac{\partial f(g)}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x}. \tag{5}$$

Цепочку вложенных функций можно продолжать рассматривать рекуррентным образом; каждая следующая вложенная функция будет играть роль аргумента предыдущей.

<u>Пример</u>: рассмотрим функцию $y = \cos(x^3)$, где $f(g) - \cos(g)$, $g(x) = x^3$. Вычислим производную:

$$\frac{d\cos(x^3)}{dx} = \frac{\partial \cos(x^3)}{\partial (x^3)}\frac{d(x^3)}{dx} = \frac{\partial \cos(x^3)}{\partial (x^3)}\frac{\partial (x^3)}{\partial x} = \sin(x^3) \cdot 3x^2. \tag{6}$$

Примеры вычисления в порядке усложнения[4].

- $y = \sin(\exp(x))$, $y' = \cos(\exp(x)) \cdot \exp(x)$;
- $y = \exp(x^2 + \tan(2x^3))$, $y' = \exp(x^2 + \cos(2x^3)) \cdot \left[2x - \sin(2x^3) \cdot 6x\right]$;
- $y = a^{\ln x}$, $a = \mathrm{const}$, $y' = a^{\ln x} \ln a \cdot \frac{1}{x}$;
- $y = \ln(\frac{\cos(ax^2)}{\sin(\ln x)})$, $a = \mathrm{const}$, $y' = \frac{\sin(\ln x)}{\cos(ax^2)} \cdot \left[\frac{-\sin(ax^2) \cdot 2ax}{\sin(\ln x)} - \frac{\cos(ax^2)}{[\sin(\ln x)]^2} \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\right]$;
- $y = x^x$, $y = \exp\left[\ln x^x\right] = \exp\left[x \ln x\right]$, $y' = \exp\left[\ln x^x\right] \cdot (\ln x + x \cdot \frac{1}{x})$; (воспользоваться экспоненцированием)
- $y = \left(\ln x^x\right)^{\ln x^x}$, $y =$? Найти явное выражение самостоятельно, пользуясь результатами предыдущих примеров [5].
- $y = x^{x^{x^{x^{\cdots^{x}}}}}$, n возведений в степень. Обозначить $y = f(n)$, воспользоваться $y = \exp\left[\ln f(n)\right] = \exp\left[f(n-1)\ln x\right]$, и построить сначала рекуррентную формулу $y' = f(n)\left[f'(n-1)\ln x + f(n-1) \cdot \frac{1}{x}\right]$, а затем и явный вид выражения. Вариант попроще: решить для $n = 1, 2, 3$ и построить по индукции явный вид для произвольного n.

[1] Везде ниже частная производная функции одной переменной $y = f(x)$ по x будет обозначаться как $y' = f'(x)$ без указания нижнего индекса.

[2] То есть функция y ставит значение f в соответствие каждому значению g, такому, что g полностью определяется значением x

[3] Подробное доказательство см. в Фихтенгольтц

[4] Рекомендуется проделать примеры руками и сравнить с приведенными результатами для закрепления навыков взятия частных производных.

[5] Fortes fortuna adiuvat.

Производные высших порядков

Производная функции одной переменной, $y' = f'(x)$, снова является (сюрприз) некоторой функцией $y_1 = h(x)$, в чем можно наглядно убедиться, посмотрев на примеры[6]. Это означает, что для новой функции $h(x)$ можно снова ввести понятие скорости роста и вычислить эту скорость как производную $y'_1 = h'(x) = (y')' = f''(x)$. Такая производная называется второй частной производной и вычисляется по тем же правилам, что и обычная частная производная.

2 Функции нескольких переменных

Производная, дифференциал, частная производная

Функция нескольких переменных ставит n числам из наборов x_1, x_2, ..., x_n одно число из набора y, определяемое по правилу

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{7}$$

Функцию многих переменных можно представить как кривую в $(n+1)$-мерном пространстве. Так, например, цветной градиент на плоскости, в котором цвет, заданный в виде rgb-переменной, определяется положением пикселей x и y, по вертикальной и горизонтальной оси монитора, и является функцией двух переменных:

В обобщенном случае функцию n переменных можно считать кривой, связывающей наборы чисел y и x_i,$i = 1, 2, \ldots, n$. Так же, как для кривой в одномерном пространстве, можно ввести понятие скорости роста v_i функции y при сдвиге по одной из координат x_i. Действуя по аналогии с одномерным случаем, для функции (7) вводим следующие понятия:

- приращение аргумента dx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$
- дифференциал, или полное приращение функции $dy = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + \ldots + v_n dx_n$
- набор частных производных $v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, определяющих скорость роста функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в направлении x_i
- набор полных производных $\frac{dy}{dx_i} = v_1 \frac{dx_1}{dx_i} + v_2 \frac{dx_2}{dx_i} + \ldots + v_n \frac{dx_n}{dx_i}$, характеризующих полное изменение функции y при сдвиге в направлении координатной оси x_i

В том случае, когда переменные x_i,$i = 1, 2, \ldots, n$, являются *независимыми* (как, например, для рассмотренного примера с градиентом), и сдвиг по одной переменной не влечет за собой сдвиг по другим, полные производные $\frac{dx_i}{dx_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 0$ при $i \neq j$, и $\frac{dx_i}{dx_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 1$ при $i = j$.

Пример: рассмотрим функцию $z = f(x, y) = \cos(x + 2y)$; переменные x,y считать независимыми.[7].

- дифференциал $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$;
- частные производные $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \cos(x+2y)}{\partial x} = \sin(x + 2y) \frac{\partial (x+2y)}{\partial x} = \sin(x + 2y)$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \cos(x+2y)}{\partial y} = \sin(x + 2y) \frac{\partial (x+2y)}{\partial y} = 2\sin(x + 2y)$;
- полные производные $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$

Аналогично одномерному случаю можно ввести понятие частных переменных высших порядков – вторых, третьих и так далее.

[6] Я знаю, что вы пропустили самостоятельное их вычисление. Вернитесь назад и проделайте хотя бы половину.

[7] Обратите внимание, что аргумент косинуса – это еще одна функция. Мы работаем со сложной функцией; внешняя функция – это косинус, внутренняя – линейная сумма $x + 2y$, конечные аргументы – пара переменных x и y.

Применение и преобразования

Пример: вычисление полной производной по времени от лагранжиана системы $L(q(t), \dot{q}(t), t) = T - U$, где $q(t)$ – обобщенная координата, $\dot{q}(t) = dq(t)/dt$ – скорость изменения этой координаты, и t – время:

$$\frac{dL(q(t), \dot{q}(t), t)}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q(t)} \frac{dq(t)}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \frac{d\dot{q}(t)}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \frac{dt}{dt}, \tag{8}$$

где dt/dt, естественно, равняется 1. Формально – это пример дифференцирования функции одной переменной (q и $\dot{q}$ являются функциями от одной переменной, времени t); тем не менее, мы обращаемся с функциями $q(t)$ и $\dot{q}(t)$ как с независимыми переменными.
Пример: внесение производной под дифференциал.

Пусть $y = f(x)$, и в наличии имеется уравнение

$$y''y' = x^2. \tag{9}$$

По определению, $y' = dy/dx$, и очевидно, что y' снова является какой-то функцией от x. Обозначим ее $g(x) = y'$. Далее, вспомнив, что

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dg(x)}{dx},$$

перепишем уравнение (9) как

$$\frac{dg(x)}{dx} g(x) = x^2.$$

Так мы, во-первых, понизили порядок уравнения, во-вторых, теперь имеем возможность записать, что $g(x)dg(x) = dg^2(x)/2$.

Тренировка для определения структуры функций

Всюду порядок функций указывается начиная с внешней и в направлении внутренней. Произведения и независимые слагаемые оговариваются слева направо в порядке следования. Названия функций пишутся без аргумента.

- cos, sin, tan, arccos, arcsin, arctan – косинус, синус, тангенс, арккосинус, арксинус, арктангенс;
- exp, ln – экспонента и натуральный логарифм;
- bx^a – степенная функция; a,b — постоянные
- a^{bx} – показательная функция

Примеры:

1. $x\cos(x^2 + x)$: произведение степенной функции x и cos; аргумент cos – сумма двух степенных функций x^2, x (полином второй степени);
2. $\sin\left[3x^6 \ln(2x^5)\right]$: sin от произведения степенной функции $3x^6$ на логарифм ln; аргумент логарифма – степеная функция $2x^5$;
3. $\arccos\left[\cos\exp(x) + \sin(x^2 + \ln x)\right]$: арккосинус от суммы двух слагаемых. Первое слагаемое – косинус от экспоненты; экспонента от x. Второе слагаемое – синус суммы; сумма от степенной функции x^2 и логарифма от x.

Литература:

- Практика: Сборник задач и упражнений по математическому анализу, Демидович Б.П. (Учебник на сайте "Студизба")
- Теория: Основы математического анализа. Том 1. , Том 2., Фихтенгольц Г. (Учебник на сайте "Публичная библиотека")
- Практика диф. уравнения: Сборник задач по дифференциальным уравнениям, Филиппов А.Ф. (Прямая ссылка на учебник)