Методичка

27 марта 2026 г.

Аннотация

Кратко перечисляются методы взятия неопределенных интегралов. Приводятся примеры. В Аппендиксе содержится краткая подсказка по преобразованию часто встречающихся комбинаций.

1 Табличные интегралы

Неопределенный интеграл от функции $f(x)$ по переменной x представляет собой операцию, обратную взятию производной. Следовательно,

$$\int f'(x)dx = f(x) + C,$$

где C – любая не зависящая от x постоянная или функция. Чтобы проверить правильность этого определения, достаточно продифференцировать левую и правую часть по x. С другой стороны, из курса дифференцирования нам известно, что для дифференциала функции $f(x)$ справедливо $df(x) = f'(x)dx$. Такую связь можно использовать в обратную сторону, т. е. делать то, что называется внесением под дифференциал:

$$\int f'(x)dx = \int df(x) = f(x) + C.$$

Отсюда делаем два важных вывода: интеграл от полного дифференциала равен стоящей под дифференциалом функции, и для быстрого взятия интегралов нужно уметь быстро узнавать производные функций.

Табличные интегралы представляют собой обратные выражения для частных производных функций, которые выводились при разборе операции дифференцирования.

Пример: если производная от x^2 по dx равна $d(x^2)/dx = 2xdx/dx = 2x$, то очевидно, что интеграл от $2x$ по dx должен быть равен $x^2 + C$:

$$\int 2xdx = x^2 + C.$$

Однако, было бы неплохо уметь брать интеграл вида $\int xdx$, то есть интегрировать функцию x^1. Для этого нужно либо а) догадаться, производной от какой функции является x^1 (это функция $x^2/2$, очевидно), либо б) свести стоящее под интегралом выражение к функции, которую мы точно умеем интегировать, то есть $2x$. Для этого делаем элементарные преобразования – умножаем числитель и знаменатель на 2:

$$\int xdx = \int \frac{2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int 2xdx = \frac{1}{2}\int dx^2 = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

По индукции или используя знание производной для x^{n+1}, можем восстановить правило интегрирования для x^n $(n \neq -1)$:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}\int (n+1)x^n dx = \frac{1}{n+1}\int dx^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Абсолютно аналогично восстанавливаются все остальные табличные интегралы. По этой причине из двух классических таблиц достаточно помнить только одну: с производными. Таблица с интегралами – это просто обратное прочтение таблицы с производными.

2 Основные методы взятия интегралов

0. Сведение к табличным интегралам заменой и внесением части функции под дифференциал

Около 95% всех существующих интегралов вычисляются при помощи преобразования подынтегральной функции к одному из стандартных интегралов (или сумме стандартных интегралов). Подавляющая часть таких преобразований достигается либо заменой переменных, либо внесением какого-то множителя под дифференциал (это означает, по сути, что мы узнали часть производной $df(x)$ и собираем ее по шагам). Этот процесс представляет собой операцию, обратную дифференцированию сложной функции: так, $df(g(x)) = f'_g \cdot dg(x) = f'_g \cdot g'_x \cdot dx$; это же преобразование можно (и нужно) выполнить в обратном порядке. Сравните:

$$\begin{aligned} d(\sin x^3) &= \cos x^3 dx^3 = \cos x^3 (3x^2) dx, \\ \int 3x^2 \cos x^3 dx &= \int \cos x^3 dx^3 = \int d(\sin x^3) = \sin x^3 + C. \end{aligned}$$

Единственная разница состоит в том, чтобы помнить о добавочной постоянной C при интегрировании. Говоря чуть более строгим языком, процедура интегрирования восстанавливает не исходную функцию, а класс функций, отличающихся на константу.

Замена переменных является способом писать чуть меньше символов, и в некоторых случаях узнавать сложные производные, но по сути не отличается от внесения под дифференциал ничем. Сравните ($y = x^3 + 1$, $x = \sqrt[3]{y-1}$,$dx = (y-1)^{-2/3} dy/3$):

$$\begin{aligned} \int 3x^2 \sin(x^3+1) dx &= \int \sin(x^3+1) dx^3 = \int \sin(x^3+1) d(x^3+1) = \cos(x^3+1) + C, \\ \int 3x^2 \sin(x^3+1) dx &= \int (y-1)^{2/3} (y-1)^{-2/3} \sin y dy = \int \sin y dy = \cos y + C = \cos(x^3+1) + C. \end{aligned}$$

Для того, чтобы научиться узнавать производные от сложных функций, необходима практика. Все остальное обычно не дает большого эффекта. Обыкновенно используемые приемы включают в себя: добавление константы под дифференциал $dx = d(x+a)$, домножение и деление на константу $dx = a^{-1} d(ax)$, добавление и отнятие одной и той же константы ($x^2 = x^2 + 1 - 1$), тригонометрические преобразования ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и т. п.), доведение до полного квадрата ($(x+b)^2 = x^2 + 2bx + b^2$), логарифмирование ($x^{-1} dx = d\ln x$; $f^{-1}(x) df(x) = d \ln f(x)$), экспоненцирование ($f(x) = \exp[\ln f(x)]$) и другие – любые тождественные преобразования и замены подходят

Примеры для тренировки:
1. $\int x(x^2+1)dx$
2. $\int (x+4)^5 dx$
3. $\int \cos(x^5+1) x^4 dx$
4. $\int \tan(x^2+2x+1) dx$
5. $\int ax^2 \exp(ax^3) dx$
6. $\int 3x^{-2} dx^2$
7. $\int \ln[\sin(x)] \cos x dx$
8. $\int \frac{x^2 dx}{1+x^2}$

1. Разбиение дробей

Простой прием, который работает, когда в знаменателе функции под интегралом стоит произведение вида $(x+a)(x+b)$, а в числителе – полином:

$$\int \frac{cx+e}{(x+a)(x+b)} dx.$$

Дробь, стоящая под знаком интеграла, может быть разделена на сумму двух дробей с пока неизвестными коэффициентами:

$$\frac{cx+e}{(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} = \frac{A(x+b) + B(x+a)}{(x+a)(x+b)}.$$

Так как разные степени полинома являются линейно независимыми (т. е. не существует такого $a = \text{const}$, чтобы $ax = x^2$), то постоянные cи e в левой части уравнения должны быть равны $c = A + B$ и $e = Ab + Ba$ соответственно. После этого интеграл становится суммой двух элементарных интегралов, дающих логарифмы.

Метод работает и при большем количестве сомножителей в знаменателе; хотя иногда форма числителя может его испортить.

Примеры для тренировки:
1. $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$
2. $\int \frac{x}{(x-1)(x+3)}dx$
3. $\int \frac{1}{x^2-1}dx$

2. Интегрирование по частям

Звучит сложно, работает просто. Интегрирование – это операция, обратная дифференцированию. Дифференциал произведения двух функций $U(x)$ и $V(x)$ есть

$$d\left[U(x)V(x)\right] = V \cdot dU + U \cdot dV.$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int d\left[U(x)V(x)\right] = U \cdot V = \int V \cdot dU + \int U \cdot dV.$$

Отсюда следует стандартная формула

$$\int U \cdot dV = U \cdot V - \int V \cdot dU.$$

Само по себе такое преобразование не берет интеграл. Но часто оно позволяет упростить стоящее под ним выражение, особенно если применять его несколько раз подряд.

В качестве U удобно выбирать функции, которые при дифференцировании понижают свой порядок: это почти всегда полиномы $ax^n + bx^{n-1} + \ldots + cx + d$. Иногда это логарифмы, реже – гармонические функции или экспоненты (они по крайней мере свой порядок не увеличивают при дифференцировании). В качестве dV нужно выбрать такую функцию, которую легко проинтегировать (т. е. функцию, в которой легко опознать производную другой функции). В 90% случаев это экспонента.

Пример ($U = x$, $dU = dx$, $dV = e^x dx$, $V = e^x$):

$$\int xe^x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x + e^x + C.$$

Примеры для тренировки:
1. $\int x^2 \ln x dx$, $U = \ln x$, $dV = x^2 dx$
2. $\int (x+a)^2 e^{bx+1} dx$, $U = (x+a)^2$, $dV = e^{bx+1}$
3. $\int x^2 \sin(x+a) dx$, $U = x^2$, $dV = \sin(x+a)dx$
4. $\int x(b+x^2)\cos(b+x^2)dx$

3. Рекуррентные интегралы

Подвид интегралов, которые берутся при помощи интегрирования по частям с небольшим трюком. При взятии по частям рекуррентный интеграл после нескольких (чаще всего – двух) итераций возвращается к исходному виду с каким-то множителем и дополнительными слагаемыми.

Пример (аккуратно со знаками):

$$\int \cos(x+a)e^x dx = \cos(x+a)e^x - \int [-\sin(x+a)]e^x dx = \cos(x+a)e^x + \sin(x+a)e^x - \int \cos(x+a)]edx.$$

Дальше достаточно обозначить $\int \cos(x+a)e^x dx = A(x)$, и тогда предыдущее уравнение перепишется в виде

$$A(x) = \cos(x+a)e^x + \sin(x+a)e^x - A(x),$$

откуда немедленно следует, что

$$2A(x) = e^x[\cos(x+a) + \sin(x+a)].$$

Разделив все уравнение на 2, мы найдем явный вид функции $A(x)$, и, таким образом, значение интеграла.

Дополнительных примеров пока нет.

4. Общие советы

Когда совершенно непонятно, как брать интеграл, следует задать следующие вопросы:

– Какие функции в этот интеграл входят? Это функции разных типов или одинаковые (полиномы, экспоненты, тригонометрические и т. д.)

– Как можно преобразовать эти функции, и частью каких производных они могут являться? (даже если неочевидно, чем это преобразование поможет)

– Нельзя ли разбить этот интеграл на сумму интегралов?

– Нельзя ли заменить какую-то переменную или полином на новую переменную?

– Нельзя ли сделать универсальную тригонометрическую подстановку?

И, если надежды совсем нет, то:

– Нет ли этого интеграла в справочнике Градштейна-Рыжика?

Если его там нет, то вероятнее всего, вы плохо поискали или уже работаете над статьей под Нобелевскую премию. Однако, если его там действительно нет, то следует проверить, не является ли ваш интеграл спецфункцией, например, интегралом Дирихле (Википедия, интеграл Дирихле):

$$\int \frac{\sin x dx}{x}.$$

APPENDIX: Подсказка для троечников

Наиболее часто встречающиеся комбинации преобразований дифференциалов (левую и правую часть можно менять местами!):

$xdx = dx^2/2$
$adx = d\,(ax)$
$dx = d\,(x + n)$, где n - любое число
$\cos x dx = d\sin x$
$\sin x dx = -d\cos x$
$dx/x = d\ln|x|$
$\exp x dx = d\exp x$

Литература:

- Практика: Сборник задач и упражнений по математическому анализу, Демидович Б.П. (Учебник на сайте "Студизба")
- Теория: Основы математического анализа. Том 1. , Том 2., Фихтенгольц Г. (Учебник на сайте "Публичная библиотека")
- Практика диф. уравнения: Сборник задач по дифференциальным уравнениям, Филиппов А.Ф. (Прямая ссылка на учебник)
- Справочник по известным интегралам, рядам и функциям: Градштейн-Рыжик, (TODO добавить гиперссылку и библиографическую ссылку)