Вычисление производных в компонентах. Градиент, дивергенция, ротор

Курсивом выделяются определения и понятия.
Подчеркнуты задания для самостоятельного выполнения.

Компонентная запись векторов

Для трехмерного пространства:
$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, где a_1, a_2, a_3 – скаляры (числа).
Для сокращения записи используем $\bar{a} = a^i$ или $\bar{a} = a_i$, где индекс i может принимать значения $i = 1, 2, 3$. Положение трехмерного индекса не имеет значения.
Индекс может быть обозначен любой другой латинской буквой: $i, j, k, l, m, n, s \ldots$
Объект a^i читается как «i-тая компонента вектора $\bar{a}$», или «вектор $\bar{a}$» для краткости.
Назовите 1, 2, 3-ю компоненту векторов:
1) $(1, 0, 3)$ 2) $(0, \cos\phi, \sin\phi)$ 3) (a, b, c) 4) (x, y, z)

Для четырехмерного пространства:
$a^\mu = (a^0, a^i) = (a_0, a_1, a_2, a_3)$, где a_0, a_1, a_2, a_3 – скаляры (числа).
Обозначение с чертой не применяется для 4-векторов. Греческие индексы μ, ν и т.д. могут принимать значения $\mu = 0, 1, 2, 3$. Положение 4-мерного индекса имеет значение. Подробнее см. раздел «4-мерные вектора и производные».

Соглашение о суммировании Эйнштейна:

Немые индексы

Индексы, по которым ведется суммирование, называются *немыми*, или *свернутыми*. По двум одинаковым векторным индексам всегда подразумевается суммирование: $a^s b^s = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$. Обозначение немых индексов можно менять как заблагорассудится, до тех пор, пока немые индексы не совпадают со свободными:

$$a^i b^i = a^j b^j = a^k b^k = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3, \; i, j, k = 1, 2, 3.$$

Итого: встречаются парой, по паре индексов подразумевается суммирование, могут быть переобозначены. Произведение двух векторных величин с одинаковыми индексами всегда является числом (скаляром).

Свободные индексы:

Не повторяются в выражении. Количество *свободных* индексов определяет тип математического объекта: 0 – скаляр, 1 – вектор, 2 – матрица и так далее. Важно: в любом равенстве в левой и правой части всегда должны стоять объекты одного математического типа, т.е., с равным числом одинаковых свободных индексов.

Примеры:

$a^i b^i$, $3a^s b^s + 1$, $a^i b^i c^j d^j$, $2a^i c^k b^k a^i$ – скаляры (нет свободных индексов).
$4a^i$, $a^s + b^s$, $a^i c^j d^j$, $M^{ij} a^j$ – вектора (1 свободный индекс).
$a^i b^j$, A^{ij}, $c^j d^j M^{ks}$, $b^k M^{ij} a^j$ – матрицы (2 свободных индекса).
$a^i b^j M^{jk} c^k = 3d^i$ – в левой и в правой части равенства по одному свободному индексу, i; остальные индексы являются немыми. Выражение приравнивает i-тую компоненту левого вектора i-той компоненте правого вектора. Определить, тип объекта $b^j M^{jk} c^k$. Найти компоненту d^3 вектора $\bar{d}$.

Особые величины

Дельта Кронекера

Дельта Кронекера – это функция вида

$$\delta^{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Дельта Кронекера действует на векторные индексы:

$a^i\delta^{ik} = a^k,\ M^{ik}\delta^{kl} = M^{il},\ \delta^{sk}\delta^{kn} = \delta^{sn}$.

Дельта действует на любой индекс, который совпадает с одним из ее индексов, где бы он не находился.

Тензор Леви-Чевиты

Тензор Леви-Чевиты – это набор из 27 чисел, определенных символом ε^{ijk} и следующими правилами:

$\varepsilon^{123} = +1$, при нечетном количестве перестановок индексов $= -1$, при четном $+1$, если хотя бы два индекса совпадают – 0. Менять местами можно только стоящие рядом индексы.

Выписать, чему равны компоненты:

1) ε^{132} 2) ε^{133} 3) ε^{321} 4) ε^{333} 5) ε^{312} 6) ε^{iik}

Алгебраические действия над векторами:

Сложение двух и более векторов

При сложении двух векторов получается новый вектор.

$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = c^i = a^i + b^i$, $i = 1, 2, 3$; $\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = d^k = a^k + b^k + c^k$, $k = 1, 2, 3$

Найти сумму векторов, выписать 3-ю компоненту вектора $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$:

1) $\bar{a} = (1, 0, 0)$, $\bar{b} = (\cos\psi, \sin\psi, 0)$ 2) $\bar{a} = (0, 0, f(x))$, $\bar{b} = (g(x), h(x), 0)$ 3) $\bar{a} = (1, 1, 1)$, $\bar{b} = (-1, -1, -1)$ 4) $\bar{a} = (n + 1, n - 1, -n)$, $\bar{b} = (-n, -n + 1, n + 1)$

5) $a^i = (-1)^i$, $b^i = +1$ 6) $a^i = i$, $b^j = 2j$ 7) $a^k = 0$, $b^n = -1$ 8) $a^s = (-1)^i$, $\bar{b} = (1, 0, 1)$

Скалярное умножение двух векторов

При скалярном умножении двух векторов получатся скаляр (число).

$c = (\bar{a} \cdot \bar{b}) = a^s b^s = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$

Найти скалярные произведения для векторов:

1) $\bar{a} = (0, 1, 0)$, $\bar{b} = (1, 0, 0)$ 2) $\bar{a} = (a, 0, b)$, $\bar{b} = (0, a^{-1}, b^{-1})$ 3) $c^i = a^i + b^i$, $d^i = a^i - b^i$ 4) c^i, $([c^1]^{-1}, [c^2]^{-1}, [c^3]^{-1})$

5) $\bar{a} = (1, 0, 0)$, $\bar{b} = (0, 1, 0)$ 6) $\bar{a} = (1, 1, 0)$, $\bar{b} = (0, 1, 1)$ 7) $\bar{a} = (0, 0, -1)$, $\bar{b} = (1, 1, -1)$ 8) $a^k = (-1)^k$, $b^i = i$

Важные свойства:

$(\bar{a} \cdot \bar{b}) = (\bar{b} \cdot \bar{a})$, $(\bar{a} \cdot \bar{a}) = |\bar{a}|^2$

Векторное умножение двух векторов

При векторном умножении двух векторов получатся новый вектор.

$\bar{c} = \left[\bar{a} \times \bar{b}\right] = c^i = \varepsilon^{ijk} a^j b^k$, $i, j, k = 1, 2, 3$

Тензор Леви-Чевита ε^{ijk}:

$\varepsilon^{123} = +1$, при нечетном количестве перестановок индексов $= -1$, при четном $+1$, если хотя бы два индекса совпадают – 0.

Найти векторные произведения векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$:

1) $\bar{a} = (1, 0, 0)$, $\bar{b} = (0, 1, 0)$ 2) $\bar{a} = (1, 0, 0)$, $\bar{b} = (0, 1, 0)$ 3) $\bar{a} = (1, 0, 0)$, $\bar{b} = (0, 0, 1)$ 4) $\bar{a} = (1, 0, 0)$, $\bar{b} = (1, 0, 0)$

5) $\bar{a} = (10, 0, 10)$, $\bar{b} = (0, 10, 0)$ 6) $\bar{a} = (0, 0, f(x))$, $\bar{b} = (0, 0, g(x))$ 7) $a^i = i$, $b^k = (-1)^k$ 8) $a^i = 2i$, $b^j = j$

Важные свойства:

$\left[\bar{a} \times \bar{b}\right] = -\left[\bar{b} \times \bar{a}\right]$, $\left[\bar{a} \times \bar{a}\right] = 0$

Векторный анализ. Производные. Градиент, дивергенция, ротор.

Радиус-вектор

Вектор $\bar{r} = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, $r^i = x_i(t)$. Радиус-вектор всегда зависит от координат точки x_i, в отличие от постоянных векторов. При помощи радиус-вектора обычно параметризуют положение материального тела, которое изменяется во времени.

Модуль радиус-вектора равен расстоянию от начала координат до точки $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$.

Модуль радиус-вектора обозначается $r = |\bar{r}| = \sqrt{(\bar{r}\cdot\bar{r})} = \sqrt{x_i x_i} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Оператор градиента

Вектор, составленный из производных, называется градиентом: $\mathrm{grad} = \bar{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}) = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Производные $\frac{\partial}{\partial x_i}$ действуют на стоящие под знаком градиента функции как обычные частные производные.

Градиент можно считать только от скалярной функции, $\bar{\nabla} f(x_1, x_2, x_3) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, x_3)$. Результатом действия градиента на функцию f является вектор, составленный из производных.

Градиент от скаляра (числа) равен нулю.

Производная от произведения: $\frac{\partial}{\partial x_i}(f\cdot g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i}$.

Производная сложной функции: $\frac{\partial}{\partial x_i} f(g) = \frac{\partial f}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial x_i}$.

Вычислить градиенты ($f(\mathrm{arg})$ – неизвестная функция, зависящая от (arg)):

1) $\mathrm{grad}(3)$ 2) $\mathrm{grad}(x_3)$ 3) $\mathrm{grad}(x_1 x_2)$ 4) $\mathrm{grad}(\bar{a}\cdot\bar{r})$, $\bar{a} = (1,1,1)$

5) $\mathrm{grad}(f(x_2))$ 6) $\mathrm{grad}(f(x_1 x_3))$ 7) $\mathrm{grad}(f(x_1, x_3))$ 8) $\mathrm{grad}(g(x_2, x_3))$

Важно: $\frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \delta_{ik}$.

Оператор дивергенции

Дивергенция – это скалярное произведение вида $\mathrm{div}\bar{a} = (\bar{\nabla}\cdot\bar{a}) = \frac{\partial}{\partial x_i} a^i$. Дивергенция создает скаляр из вектора. Дивергенцию можно вычислить только от вектора.

Дивергенция постоянного вектора (компоненты которого не зависят от x_1, x_2, x_3) равна нулю.

Вычислить дивергенции:

1) $\mathrm{div}(\bar{a})$ 2) $\mathrm{div}(\bar{r})$ 3) $\mathrm{div}(30\bar{r})$ 4) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(r))$

5) $\mathrm{div}(r\bar{a})$ 6) $\mathrm{div}(r\bar{r})$ 7) $\mathrm{div}(\bar{a}-\bar{r})$ 8) $\mathrm{div}((x_1, x_2^2, x_3^3))$

Оператор ротора

Ротор – это векторное произведение $\mathrm{rot}\bar{a} = \left[\bar{\nabla}\times\bar{a}\right] = \bar{c} = c^i = \varepsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j} a^k$. Ротор создает вектор из вектора. Ротор можно вычислить только из вектора.

Ротор постоянного вектора (компоненты которого не зависят от x_1, x_2, x_3) равен нулю.

Вычислить роторы:

1) $\mathrm{rot}(\bar{a})$ 2) $\mathrm{rot}(\bar{r})$ 3) $\mathrm{rot}(30\bar{r})$ 4) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(r))$

5) $\mathrm{rot}(r\bar{a})$ 6) $\mathrm{rot}(r\bar{r})$ 7) $\mathrm{rot}(\bar{a}-\bar{r})$ 8) $\mathrm{rot}((x_1, x_2^2, x_3^3))$

4-мерные вектора и производные

В релятивистской и квантовой физике широко используется формализм 4-векторов. В этом случае к трем пространственным координатам добавляется эффективная координата $x_0 = ct$, где c – скорость света[1]. Удобно объединить эту координату с остальными, сконструировав объект, который называется 4-вектором координаты:

$$x^\mu = (x^0, x^i),\ \ \mu = 0,1,2,3. \tag{1}$$

Подразумевается, что все греческие индексы (α, β, μ, ν) принимают значения от нуля до трех, а для пары любых одинаковых индексов выполняется соглашение Эйнштейна (только суммирование идет от 0 до 3, а не от 1 до 3, как в трехмерном случае).

Квадрат такой величины, а именно комбинация $x^\mu x^\mu$, имеет вид

$$x^\mu x^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x^\mu = x^0 x^0 + x^i x^i = \left(x^0\right)^2 + \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2. \tag{2}$$

С целью введения величины, не изменяющейся при смене системы отсчета при лоренц-преобразованиях вводится понятие пространственно-временного интервала $s^2 = \left(x^0\right)^2 - \left(x^i\right)^2$. Интервал получается при умножении координаты x^μ, на 4-вектор x_μ, имеющий вид

$$x_\mu = (x^0, -x^i). \tag{3}$$

Раскрывая произведение $x^\mu x_\mu$ с учетом соглашения о суммировании Эйнштейна, получим:

$$x^\mu x_\mu = x^0 x^0 - x^i x^i = s^2. \tag{4}$$

[1]В ранней литературе также встречается обозначение x_4

Вектора с нижними индексами (x_μ) называются ***ко**вариантными*, а с верхними (x^μ) – ***контра**вариантными*. Произведение вида (3) называется *скалярным произведением 4-векторов*.

Произвольный 4-вектор a^μ подчиняется тем же определениям:

$$\begin{aligned} a^\mu &= (a^0, a^i), \ \mu = 0,1,2,3, \\ a_\mu &= (a^0, -a^i) \ i = 1,2,3. \end{aligned} \tag{5}$$

Для всех 4-векторов (кроме вектора 4-производной) выполняются те же соглашения, что и для вектора 4-коррдинаты x^μ. Зависимость функций от 4-координаты обычно обозначается $f(x^\mu) = f(x)$, где векторный индекс аргумента, μ, опускается для краткости.

В 4-мерном пространстве Минковского существует *метрика* $g^{\mu\nu}$, такая, что

$$x^\mu g^{\mu\nu} = x^\nu, \ x_\mu g^{\mu\nu} = x_\nu. \tag{6}$$

Ее действие на любые 4-векторные индексы эффективно сводится к тому, что суммированный (повторяющийся) верхний индекс она переводит в свободный нижний и наоборот. Метрика $g^{\mu\nu}$ всегда записывается с парой верхних индексов. В литературе встречаются и другие соглашения.

Обосновать, что выражение $a^\mu a_\mu = a^\mu g^{\mu\nu} a^\nu$ является скаляром.

Понятие 4-производной

После введения 4-вектора координаты x^μ логично ввести 4-вектора производной, которая обозначается ∂^μ, ∂_μ:

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\partial^0, -\partial^i), \ \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial^0, \partial^i). \tag{7}$$

Обратите внимание на расположение индекса оператора производной ∂ и знаки перед пространственными компонентами производной. Положение индекса производной и получающегося после дифференцирования вектора совпадают (рекомендуется проверка в компонентах в явном виде):

$$\partial^\mu s^2 = \frac{\partial\left(x^\nu x_\nu\right)}{\partial x_\mu} = x^\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x_\mu} + x_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x_\mu} = x^\nu \delta^{\mu\nu} + x_\nu g^{\nu\lambda} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\mu} = x^\nu \delta^{\mu\nu} + x^\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\mu} = 2x^\nu \delta^{\mu\nu} = 2x^\mu. \tag{8}$$

Проверить выполнение этого принципа для произвольного 4-векторного поля $a^\mu(x) = (a^0(x), a^1(x), a^2(x), a^3(x))$, т.е. найти $\partial^\mu a^2$ и убедится, что результатом будет контравариантный 4-вектор. Убедиться, что то же самое справедливо и для ковариантного индекса.

Полезное обозначение:

$$\partial^\mu \partial_\mu = \partial_\mu \partial^\mu = \partial^2 = \partial_0^2 - \partial_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial\left(x^0\right)^2} - \frac{\partial^2}{\partial\left(x^i\right)^2} = \Box. \tag{9}$$

Этот оператор называется оператором Даламбера.

Вычислить выражения $\partial^\mu x^\mu$, $\partial_\mu x^\mu$, $\partial^\mu x^\nu$, $\partial^\mu x_\nu$. Определить математический тип каждого из объектов.

Четырехмерная производная обладает теми же свойствами, что и трехмерная: производная от скаляра (числа) равна нулю, производная от произведения вычисляется по формуле $\partial^\mu(ab) = (\partial^\mu a)b + a(\partial^\mu b)$, производная от сложной функции по формуле $\partial^\mu f(g) = (\partial f/\partial g)\partial^\mu g$.

Вычислить $\partial^\mu(s^2)\partial_\mu(s^2)$, $\partial^\mu \partial_\mu s^2$, $\partial^\mu \partial^\nu s^2$.